I.M. Vinográdov

Fundamentos de la Teoria de los Numeros

ΣΠ

EDITORIAL MIR MOSCU

И. Виноградов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ



ИЗДАТЕЛЬСТВО · НАУКА ·

I. Vinográdov

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE LOS NUMEROS



Traducido del ruso por
Candidato a doctor
en ciencias físico-matemáticas,
catedrático
de matemáticas superiores
E. Aparicio Bernardo

EDITORIAL · MIR · MOSCU

Impreso en la URSS

Segunda edición



IVAN MATVEEVICH VINOGRADOV

MIEMBRO DE NUMERO
DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS DE LA URSS
HEROE DEL TRABAJO SOCIALISTA
LAUREADO DEL PREMIO ESTATAL

PROLOGO

RESEÑA BIOGRAFICA dedicada al 80 aniversario del nacimiento del académico I. M. Vinográdov

El autor de este libro, Iván Matvéevich Vinográdov (nacido el 14 (2) de Septiembre de 1891), es uno de los más célebres matemáticos de la actualidad. Las investigaciones de I. M. Vinográdov están directamente ligadas a los estudios de la escuela de teoría de los números de Petersburgo, a la cual pertenecieron P. L. Chébishev (1821-1894), E. I. Zolotariov (1847-1878), C. F. Voronoy (1868-1908) y otros eminentes matemáticos.

El desarrollo de la teoría analítica de los números en la URSS durante los últimos 50 años está estrechamente relacionado con el nombre de Vinográdov y su escuela. Actualmente se han publicado más de 140 trabajos científicos de I. M. Vinográdov, entre los cuales merecen especial atención las monografías fundamentales: «Un método nuevo en la teoría analítica de los números» (año 1937) y «Método de las sumas trigonométricas en la teoría de los números» (año 1947). En estas dos monografías se condensan los resultados de todas las investigaciones anteriores del autor, que contribuyeron a la creación de un nuevo

método en la teoría de los números. En la actualidad, éste se conoce como el método de Vinográdov de las sumas trigonométricas. Los fundamentos de este método fueron creados ya por él mismo en el año 1934. Este es un método muy general, muy profundo y sumamente fecundo, mediante el cual I. M. Vinográdov consiguió resolver los problemas clásicos de Goldbach, Waring y otros más. En las monografías de I. M. Vinográdov desempeña un papel decisivo la acotación de las sumas trigonométricas múltiples, cuya introducción y estudio representaba de por sí un éxito de grandísima importancia en la teoría de los números. Una de estas acotaciones viene expuesta en el presente libro (véase la pregunta 14 del capítulo VI).

En esta reseña no tenemos posibilidad de hacer una exposición detallada de la obra científica de I. M. Vinográdov. Nos limitaremos solamente a enunciar algunos de sus resultados fundamentales.

En el año 1917, I. M. Vinográdov se dedica al problema del cálculo asintótico de los puntos enteros dentro de los circuitos (véanse en el cap. II, las preguntas 1 a, b, c, d, e, 22 a, b y en el cap. III, las preguntas 5, 6). En su tiempo se ocupó de estos problemas G. F. Voronoy. Los resultados que obtuvo Voronoy para un caso particular (la hipérbola), los consiguió también Vinográdov para una clase muy amplia de circuitos, basándose en unas ideas geométricas más claras y empleando unos métodos analíticos más sencillos. En el año 1926, el matemático checo V. Yarnik demostró que estos teoremas no podían mejorarse

considerablemente. En el año 1963, I. M. Vinográdov obtuvo también el resultado más exacto respecto del número F de puntos enteros en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$. *Este número se expresa por la fórmula asintótica*

$$F = \frac{4}{3}\pi a^3 + O(a^{4/3}(\ln a)^6).$$

Algunos de los resultados de I. M. Vinográdov ya son clásicos. Por ejemplo, ya en el año 1918 demostró que la raíz primitiva mínima de un número primo $p > 3$ *(sobre las raíces primitivas, véase el cap. VI, § § 1-5 y las preguntas del mismo capítulo, 5, 12 c, 14) no es superior a* $2^{2h}\sqrt{p}\ln p$, *donde h denota la cantidad de divisores primos distintos de* $p - 1$.

Es bien conocido también el siguiente teorema de I. M. Vinográdov (año 1926). Sea p un número primo y sea n un divisor de $p - 1$, *donde* $n \neq 1$. *Entonces, el no-resto mínimo de grado n respecto del módulo p (véanse los conceptos de resto y no-resto en el cap. V, § 1, preguntas 8 d, 12 b y en el cap. VI, § 5) no es superior a* $p^{\frac{1}{2k}}(\ln p)^2$, *donde* $k = e^{1-\frac{1}{n}}$. *En relación con esto, obsérvese que en el año 1796 Gauss demostró que el no-resto cuadrático mínimo (mód. p) no es superior a* $2\sqrt{p}$. *El resultado de Vinográdov fue el primer adelanto en esta cuestión desde los tiempos de Gauss.*

Mucha atención prestó I. M. Vinográdov al problema de la resolución de la ecuación $x_1^n + \ldots + x_r^n = N$ *en números enteros* $x_i \geqslant 0$ *(el llamado problema de Waring, planteado por éste en el año 1770). En el año 1909, D. Hilbert demuestra que esta*

ecuación es resoluble para valores acotados de r. En los años 1919-1920, Hardy y Littlewood estudiaron el comportamiento asintótico del número de soluciones de las ecuaciones de Waring para $r \geqslant n\, 2^n$. *El valor mínimo de r, para el cual la ecuación de Waring admite solución para todos los números N suficientemente grandes, se denota mediante G (n). Para esta magnitud, en el año 1934, I. M. Vinográdov obtuvo la cota* $G(n) < n(3\ln n + 11)$ *y en el año 1959, la cota más exacta* $G(n) < n(2\ln n + 4\ln\ln n + 2\ln\ln\ln n + 13)$. *Estas cotas no pueden mejorarse considerablemente, puesto que es sabido que* $G(n) > n\ (n \geqslant 2)$.

I. M. Vinográdov demostró también que la fórmula asintótica, propuesta por Hardy y Littlewood,

$$I(N) = \frac{(\Gamma(1+\nu))^r}{\Gamma(r\nu)} N^{r\nu-1}\sigma + O(N^{r\nu-1-\nu^2})$$

($\nu = \frac{1}{n}$, $\Gamma(s)$ *es la función Gamma de Euler;* σ *es «la serie especial», introducida por Hardy y Littlewood) para la cantidad de expresiones del número entero* $N > 0$ *en la forma* $N = x_1^n + \ldots + x_r^n$, *con enteros positivos* $x_1, \ldots, x_r$ *es válida para* $r \geqslant [10n^2 \ln n]$.

I. M. Vinográdov obtuvo una serie de cotas importantes: para las sumas de Weil, de la forma $S = \sum_{x=1}^{P} \exp 2\pi i m F(x)$, *donde* $m > 0$ *es un número entero y* $F(x)$ *es un polinomio de coeficientes reales; para las sumas extendidas a números primos,*

de la forma $\sum_{p<N} \exp(2\pi i\alpha p)$, *donde* α *es un número real; para las sumas de la forma* $\sum_{p\leq N} \chi(p+k)$, *donde* χ *denota un carácter no principal (véase la definición de carácter en el cap. VI, pregunta 9), y también en la teoría de la aproximación de polinomios mediante partes fraccionarias.*

En general, es difícil indicar problemas de la teoría analítica de los números, a los cuales I. M. Vinográdov no haya prestado atención alguna. Por otra parte, algunos de los problemas resueltos por I. M. Vinográdov habían sido ya planteados más de 150 años atrás, sin encontrar resolución alguna durante dichos años, a pesar de los esfuerzos realizados para resolverlos por los científicos más notables del mundo. Tales son, por ejemplo, los problemas de Waring y Goldbach mencionados anteriormente. Este último problema apareció en el año 1742 en la correspondencia entre Chr. Goldbach y L. Euler. Chr. Goldbach manifestó la hipótesis de que todo número entero, mayor que tres, podía expresarse en forma de una suma de no más de tres números primos. Todos los intentos de los grandes matemáticos de resolver este problema resultaban inútiles. En lo fundamental, este problema fue resuelto por primera vez por I. M. Vinográdov en el año 1937, demostrando que todo número impar, mayor que cierto número N_0 *(la constante de Vinográdov), se expresa en forma de una suma de no más de tres números primos. También demostró que el número de expresiones* $I(N)$ *de un número impar* $N > 0$ *en forma de una suma de tres números primos,*

$N = p_1 + p_2 + p_3$, *se expresa por la fórmula asintótica*

$$I(N) = \frac{N^2}{2r^3} S(N) + O\left(\frac{N^2}{r^{3,5-\varepsilon}}\right),$$

donde $S(N) > 0{,}6$, $r = \ln N$ *y* $\varepsilon > 0$ *es un número arbitrariamente pequeño. Para la constante de Vinográdov, los matemáticos soviéticos ya han demostrado que*

$$N_0 \leqslant \exp\ \exp\ (16{,}038).$$

Son importantes también los resultados obtenidos por I. M. Vinográdov respecto de la ζ-función de Riemann (véase la definición en el cap. II, preguntas 12-14,20). I. M. Vinográdov demostró que

$$\zeta(1 + it) = O((\ln t)^{2/3})$$

y que $\zeta(1 + it)$ *no tiene ceros en la región*

$$\sigma > 1 - \frac{A}{(\ln t)^{2/3}}.$$

Para la cantidad de números primos $\pi(x)$ *que no son superiores a* x *(véase el cap. II, preguntas 19c, 24), de aquí resulta la acotación*

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dx}{\ln x} + O(xe^{-\alpha(\ln x)^{0,6}}),$$

donde $\alpha > 0$ *es una constante.*

Los métodos de Vinográdov fueron desarrollados también, y siguen desarrollándose actualmente, por sus numerosos alumnos, de los cuales en esta breve reseña no tenemos posibilidad de relatar.

Para concluir, indiquemos que desde el año 1932 I. M. Vinográdov encabeza el centro matemático principal de la Unión

Soviética, el Instituto Matemático V. A. Steklov de la Academia de Ciencias de la URSS. I. M. Vinográdov es miembro numerario de la Academia de Ciencias de la URSS desde el año 1929.

Los méritos de I. M. Vinográdov en la teoría de los números también han sido reconocidos como corresponde fuera de la Unión Soviética. I. M. Vinográdov es miembro extranjero de la Sociedad Real de Londres, de la Academia de Ciencias de Dinamarca y de la Academia Nacional dei Lincei (Roma); es miembro honorífico de la Academia de Ciencias de Hungría; es miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de Alemania en Berlín y de la Academia de Ciencias de París; es Doctor honorífico de filosofía de la Universidad de Oslo (Noruega); es miembro extranjero honorífico de las Sociedades Matemáticas de Amsterdam, Londres y de la India, así como de la Sociedad Filosófica americana en Filadelfia y de la Academia americana de Artes y Ciencias en Bostón.

El libro que proponemos, «Fundamentos de la teoría de los números», a distinción de otras obras de I. M. Vinográdov, es un manual de texto destinado a los estudiantes de las facultades de matemáticas de las universidades. Es difícil hallar otro libro tan conciso sobre teoría de los números, donde el material esté expuesto con tanta claridad y rigurosidad.

En lo fundamental, está dedicado al estudio de la teoría de las congruencias. No obstante, las preguntas expuestas al final de cada capítulo abarcan un material que está relacionado

ya con los problemas fundamentales de la teoría analítica de los números.

Durante la preparación de la traducción castellana, el autor expuso al traductor su opinión acerca de la utilización del libro por el lector. El autor considera que al preparar las respuestas a las preguntas, primero hay que hacer la prueba de resolver los problemas planteados individualmente. Solamente cuando se hayan agotado todos los medios para su resolución, el lector deberá examinar las respuestas e indicaciones que se dan al final del libro.

El presente libro «Fundamentos de la teoría de los números», fue escrito sobre la base de los cursos explicados por el autor en los años 1918-1920 en la Universidad de Perm y en los años 1920-1934 en la Universidad de Leningrado. La primera edición del libro salió en el año 1936. En adelante, el libro ha sido mejorado y completado. La presente traducción se ha hecho de la séptima edición rusa.

25. XII. 1970 E. APARICIO BERNARDO

CAPITULO PRIMERO

Teoría de la divisibilidad

§ 1. Conceptos y teoremas fundamentales

a. La teoría de los números se dedica al estudio de las propiedades de los números enteros. Llamaremos enteros no sólo a los números de la serie natural 1, 2, 3, . . . (enteros positivos), sino también al cero y a los enteros negativos —1, —2, —3, . . .

Por regla general, al exponer la teoría designaremos con letras solamente los números enteros. Los casos en que las letras no designen números enteros los advertiremos especialmente, si es que ello mismo no está claro.

La suma, diferencia y producto de dos enteros a y b también serán enteros, pero el cociente de la división de a por b (si b es distinto de cero) puede ser tanto entero como no entero.

b. Si el cociente de la división de a por b es entero, designándole con la letra q, se tiene $a = bq$, es decir, *a es igual al producto de b por un entero*. Diremos entonces que a es divisible por b o que b divide a a. En este caso, a se llama *múltiplo* de b y b se llama *divisor* de a. El hecho de que b divide a a se escribe así: $b \diagdown a$.

Subsisten los dos teoremas siguientes:

1. *Si a es múltiplo de m y m es múltiplo de b, a es múltiplo de b.*
En efecto, de $a = a_1 m$, $m = m_1 b$ se deduce que $a = a_1 m_1 b$, donde $a_1 m_1$ es entero. Esto demuestra el teorema.
2. *Si en una igualdad de la forma $k + l + \ldots + n = p + q + \ldots + s$, respecto de todos los términos, a excepción de uno cualquiera de ellos, se sabe que son múltiplos de b, entonces este término también es múltiplo de b.*
En efecto, sea k tal término. Se tiene

$$l = l_1 b, \ \ldots, \ n = n_1 b, \ p = p_1 b, \ q = q_1 b, \ \ldots, \ s = s_1 b,$$
$$k = p + q + \ldots + s - l - \ldots - n =$$
$$= (p_1 + q_1 + \ldots + s_1 - l_1 - \ldots - n_1)\, b.$$

Esto demuestra el teorema.
c. En el caso general, que incluye particularmente el caso en que a es divisible por b, se tiene el teorema:
Todo entero a se expresa de un módo único mediante un entero positivo b en la forma

$$a = bq + r; \ 0 \leqslant r < b.$$

En efecto, se obtiene una expresión de a en tal forma tomando bq igual al máximo múltiplo del número b que no es superior a a. Suponiendo que también $a = bq_1 + r_1$, $0 \leqslant r_1 < b$, resulta $0 = b(q - q_1) + r - r_2$, de donde se deduce (**2, b**) que $r - r_1$ es múltiplo de b. Pero en virtud de $|r - r_1| < b$, lo último es posible solamente si $r - r_1 = 0$, es decir, si $r = r_1$, de donde se deduce también que $q = q_1$.
El número q se llama *cociente incompleto* y el número r, *residuo* o *resto* de la división de a por b.
Ejemplo. Sea $b = 14$. Se tiene

$$177 = 14 \cdot 12 + 9; \qquad 0 < 9 < 14,$$
$$-64 = 14 \cdot (-5) + 6; \qquad 0 < 6 < 14,$$
$$154 = 14 \cdot 11 + 0; \qquad 0 = 0 < 14.$$

§ 2. *Máximo común divisor*

a. A continuación consideraremos sólo los divisores positivos de los números. Todo entero que divide simultáneamente a los enteros a, b, . . ., l, se llama *divisor común* de los mismos. El mayor de los divisores comunes se llama *máximo común divisor* y se designa con la notación $(a, b, \ldots, l)$. Como la cantidad de divisores comunes es finita, la existencia del máximo común divisor es evidente. Si $(a, b, \ldots l) = 1$, $a, b, \ldots, l$ se llaman primos entre sí. Si cada uno de los números a, b, . . ., l, es primo con cada uno de los demás, $a, b, \ldots, l$ se llaman *primos entre sí dos a dos*. Es obvio que los números primos entre sí dos a dos son también primos entre sí; en el caso de dos números los conceptos de «primos entre sí dos a dos» y «primos entre sí» coinciden.

Ejemplos. Como $(6, 10, 15) = 1$, los números 6, 10, 15 son primos entre sí. Como $(8, 13) = (8, 21) = (13, 21) = 1$, los números 8, 13, 21 son primos entre sí dos a dos.

b. Ocupémonos primero de los divisores comunes de dos números.

1. *Si a es múltiplo de b, el conjunto de los divisores comunes de los números a y b coincide con el conjunto de los divisores del solo número b; en particular, $(a, b) = b$.*

En efecto, todo divisor común de los números a y b es un divisor de b. Recíprocamente, siendo a múltiplo de b, todo divisor del número b (**1**, **b**, **§ 1**) es también un divisor del número a, es decir, es un divisor común de los números b y a. Por lo tanto, el conjunto de los divisores comunes de los números a y b coincide con el conjunto de los divisores del solo número b. Y como el máximo divisor del número b es el mismo b, resulta $(a, b) = b$.

2. *Si*

$$a = bq + c,$$

entonces el conjunto de los divisores comunes de los números a y b coincide con el conjunto de los divisores comunes de los números b y c; en particular, $(a, b) = (b, c)$.

En efecto, la igualdad escrita más arriba muestra que todo común divisor de los números a y b divide también a c (**2**, **b**, **§ 1**) y, por consiguiente es un común divisor de los números b y c. Recíprocamente, la misma igualdad muestra que todo común divisor de los números b y c divide a a y, por consiguiente, es un común divisor de los números a y b. Por lo tanto, los divisores comunes de los números a y b son los mismos que los divisores comunes de los números b y c; en particular, tienen que coincidir también los mayores de estos divisores, es decir, $(a, b) = (b, c)$.

c. Para buscar el máximo común divisor, así como para deducir sus propiedades principales, se emplea el *algoritmo de Euclides*. Este último consiste en lo siguiente. Sean a y b enteros positivos. Según **c**, **§ 1**, hallamos la serie de igualdades:

$$\left.\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_2, & 0 < r_2 < b, \\ b = r_2 q_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, \\ r_2 = r_3 q_3 + r_4, & 0 < r_4 < r_3, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} = r_n q_n, & \end{array}\right\} \quad (1)$$

que termina cuando se obtiene cierto $r_{n+1} = 0$. Esto último es indispensable, puesto que la sucesión $b, r_2, r_3, \dots,$ como sucesión de enteros decrecientes, no puede contener más de b positivos.

d. Examinando las igualdades (1) de arriba a abajo, nos convencemos (**b**) de que los divisores comunes de los números a y b son iguales a los divisores comunes de los números b y r_2, luego son iguales a los divisores comunes de los números r_2 y r_3, de los números r_3 y $r_4, \dots,$ de los números r_{n-1} y r_n, finalmente, a los divisores del solo número r_n. A la vez, se tiene

$$(a, b) = (b, r_2) = (r_2, r_3) = \dots = (r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Obtenemos los siguientes resultados.

1. *El conjunto de los divisores comunes de los números a y b coincide con el conjunto de los divisores de su máximo común divisor.*

2. *Este máximo común divisor es igual a* r_n es decir, *es igual al último resto del algoritmo de Euclides, distinto de cero.*

Ejemplo. Apliquemos el algoritmo de Euclides para averiguar (525, 231). Hallamos (los cálculos auxiliares se exponen a la izquierda)

```
            525 | 231
            462 |-----
        231 |-----  2
        189 | 63
    63 |-----  3
    42 | 42
42 |-----  1
42 | 21
---|-----
»» |  2
```

$$525 = 231 \cdot 2 + 63,$$
$$231 = 63 \cdot 3 + 42,$$
$$63 = 42 \cdot 1 + 21,$$
$$42 = 21 \cdot 2.$$

Aquí el último resto positivo es $r_4 = 21$. Por lo tanto, $(525, 231) = 21$.

e. 1. *Designando con la letra m cualquier entero positivo, se tiene* $(am, bm) = (a, b)\, m$.

2. *Designando con la letra* δ *cualquier divisor común de los números a y b, se tiene* $\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right) = \frac{(a, b)}{\delta}$; *en particular, se tiene* $\left(\frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)}\right) = 1$, *es decir, los cocientes de la división de dos números por su máximo común divisor son números primos entre sí.*

En efecto, multipliquemos las relaciones (1) término a término por m. Obtendremos nuevas relaciones, donde en lugar de $a, b, r_2, \ldots, r_n$ figurarán $am, bm, r_2m, \ldots r_nm$. Por esto, $(am, bm) = r_nm$, y por lo tanto, el aserto **1** es cierto.

Aplicando el aserto **1**, hallamos

$$(a, b) = \left(\frac{a}{\delta}\delta, \frac{b}{\delta}\delta\right) = \left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right)\delta,$$

de donde se deduce el aserto **2**.

f. 1. *Si* $(a, b) = 1$, *se tiene* $(ac, b) = (c, b)$.
En efecto, (ac, b) divide a ac y bc y, por consiguiente, (**1, d**), también divide a (ac, bc), igual a c, debido a **1, e**; pero (ac, b) divide a b, por lo cual también divide a (c, b). Recíprocamente, (c, b) divide a ac y b, por lo cual también divide a (ac, b). Por lo tanto, (ac, b) y (c, b) se dividen mutuamente y, por consiguiente, son iguales entre sí.
2. *Si* $(a, b) = 1$ *y* ac *es divisible por* b, *entonces* c *es divisible por* b.
En efecto, de $(a, b) = 1$ y de **1** se deduce que $(ac, b) = (c, b)$, y de la divisibilidad de ac por b y de **1, b** se deduce que $(ac, b) = b$. Por esto $(c, b) = b$ y, por consiguiente, c es divisible por b.
3. *Si cada uno de los números* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *es primo con cada uno de los números* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, *el producto* $a_1 a_2 \ldots a_m$ *es primo con el producto* $b_1 b_2 \ldots b_n$.
En efecto, (teorema **1**), se tiene

$$(a_1a_2a_3 \ldots a_m, b_k) = (a_2a_3 \ldots a_m, b_k) =$$
$$= (a_3 \ldots a_m, b_k) = \ldots = (a_m, b_k) = 1,$$

y haciendo luego para abreviar $a_1a_2 \ldots a_m = A$, hallamos del mismo modo

$$(b_1b_2b_3 \ldots b_n, A) = (b_2b_3 \ldots b_n, A) =$$
$$= (b_3 \ldots b_n, A) = \ldots = (b_n, A) = 1.$$

g. El problema de la averiguación del máximo común divisor de más de dos números se reduce al mismo para dos números. Precisando, para hallar el máximo común divisor de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, formamos la sucesión de números:

$$(a_1, a_2) = d_2, \ (d_2, a_3) = d_3, \ (d_3, a_4) = d_4,$$
$$\ldots, (d_{n-1}, a_n) = d_n.$$

El número d_n será el máximo común divisor de todos los números dados.
En efecto, (**1, d**), los divisores comunes de los números a_1 y a_2

coinciden con los divisores de d_2; por esto, los divisores comunes de los números a_1, a_2 y a_3 coinciden con los divisores comunes de los números d_2 y a_3, es decir, coinciden con los divisores de d_3. Luego nos convencemos de que los divisores comunes de los números a_1, a_2, a_3, a_4 coinciden con los divisores de d_4, etc., y, finalmente que los divisores comunes de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ coinciden con los divisores de d_n. Y como el mayor divisor de d_n es el mismo d_n, éste será el máximo común divisor de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Examinando la demostración expuesta nos convencemos de que el teorema **1, d** subsiste también para más de dos números. Subsisten también los teoremas **1, e** y **2, e**, puesto que al multipilicar por m o al dividir por δ todos los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ también se multiplican por m o se dividen por δ todos los números $d_2, d_3, \ldots, d_n$.

§ 3. Mínimo común múltiplo

a. Todo entero que es un múltiplo de todos los números dados se llama *múltiplo común* de los mismos. El menor múltiplo común positivo se llama *mínimo común múltiplo.*

b. Ocupémonos primero del mínimo común múltiplo de dos números. Sea M algún múltiplo común de los enteros a y b. Como éste es múltiplo de a, se tiene $M = ak$, donde k es entero. Pero M también es múltiplo de b, por lo cual también tiene que ser entero

$$\frac{ak}{b},$$

el cual, haciendo $(a, b) = d$, $a = a_1d$, $b = b_1d$, se puede expresar en la forma $\frac{a_1k}{b_1}$, donde $(a_1, b_1) = 1$ (**2, e, § 2**). Por esto (**2, f, § 2**), k tiene que ser divisible por b_1, $k = b_1t = \frac{b}{d}t$, donde t es entero. De aquí que

$$M = \frac{ab}{d}t.$$

Recíprocamente, es evidente que cualquier M de esta forma es múltiplo tanto de a como de b, y, por consiguiente, esta forma proporciona todos los múltiplos comunes de los números a y b.

El menor positivo de estos múltiplos, es decir, el mínimo común múltiplo, se obtiene para $t = 1$. Este es

$$m = \frac{ab}{d}.$$

Introduciendo m, la fórmula obtenida para M se puede escribir así:

$$M = mt.$$

La última y penúltima igualdades dan lugar a los teoremas:

1. *El conjunto de los múltiplos comunes de dos números coincide con el conjunto de los múltiplos de su mínimo común múltiplo.*

2. *Este mínimo común múltiplo de dos números es igual a su producto, dividido por su máximo común divisor.*

c. Supongamos que se necesita hallar el mínimo común múltiplo de más de dos números $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Designando en general con la notación $[a, b]$ el mínimo común múltiplo de los números a y b, formemos la sucesión de números:

$$[a_1, a_2] = m_2, [m_2, a_3] = m_3, \ldots, [m_{n-1}, a_n] = m_n.$$

El número m_n obtenido de este modo será el mínimo común múltiplo de todos los números dados.

En efecto, (**1, b**), los múltiplos comunes de los números a_1 y a_2 coinciden con los múltiplos de m_2, por lo cual los múltiplos comunes de los números a_1, a_2, y a_3 coinciden con los múltiplos comunes de m_2 y a_3, es decir, coinciden con los múltiplos de m_3. Luego nos convencemos de que los múltiplos comunes de los números a_1, a_2, a_3, a_4 coinciden con los múltiplos de m_4, etc., y, finalmente, de que los múltiplos comunes de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ coinciden con los múltiplos de m_n, y como el menor múltiplo positivo de m_n es el mismo m_n, éste

es el mínimo común múltiplo de los números a_1, $a_2, \ldots, a_n$.

Examinando la demostración expuesta, vemos que el teorema **1, b** subsiste también para más de dos números. Además, nos convencemos de que se verifica el siguiente teorema:

El mínimo común múltiplo de números que son primos dos a dos es igual al producto de los mismos.

§ 4. Relación del algoritmo de Euclides con las fracciones continuas

a. Sea α cualquier número real. Designemos con la letra q_1 el mayor entero que no supera a α. Si α no es entero, se tiene

$$\alpha = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}; \quad \alpha_2 > 1.$$

Exactamente igual, si $\alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ no son enteros, se tiene

$$\alpha_2 = q_2 + \frac{1}{\alpha_3}; \quad \alpha_3 > 1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{s-1} = q_{s-1} + \frac{1}{\alpha_s}; \quad \alpha_s > 1,$$

en virtud de lo cual obtenemos el siguiente *desarrollo de α en fracción continua*:

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_{s-1} + \cfrac{1}{\alpha_s}}}}. \tag{1}$$

b. Si α es irracional, todos los números α_s son irracionales (si α_s fuese racional, en virtud de (1), resultaría también α racional) y el proceso indicado puede prolongarse indefinidamente.

Si α es racional y, por consiguiente, puede expresarse por una fracción racional irreducible con denominador positivo: $\alpha = \frac{a}{b}$, el proceso indicado será finito y puede efectuarse me-

diante el algoritmo de Euclides. En efecto se tiene:

$$a = bq_1 + r_2; \qquad \frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r_2}},$$

$$b = r_2 q_2 + r_3; \qquad \frac{b}{r_2} = q_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}},$$

. . . .

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n; \qquad \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \cfrac{1}{\cfrac{r_{n-1}}{r_n}},$$

$$r_{n-1} = r_n q_n; \qquad \frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n,$$

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}}.$$

c. Los números $q_1, q_2, \ldots,$ que figuran en el desarrollo del número α en fracción continua, se llaman *cocientes incompletos* (en caso de α racional, según **b**, éstos son los cocientes incompletos de las divisiones sucesivas del algoritmo de Euclides), las fracciones

$$\delta_1 = q_1, \quad \delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_2}, \quad \delta_3 = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}, \ldots$$

se llaman *reducidas*.

d. Fácilmente se halla una ley muy simple de formación de las reducidas, observando que $\delta_s (s > 1)$ se obtiene de δ_{s-1} sustituyendo los números q_{s-1} por $q_{s-1} + \frac{1}{q_s}$ en la expresión literal δ_{s-1}. En efecto, haciendo para unificar $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$, podemos representar sucesivamente las fracciones reducidas en la forma siguiente (aquí se escribe la igualdad $\frac{A}{B} = \frac{P_s}{Q_s}$

para designar A con la notación P_s y B con la notación $Q_s\Big)$:

$$\delta_1=\frac{q_1}{1}=\frac{P_1}{Q_1},$$

$$\delta_2=\frac{q_1+\frac{1}{q_2}}{1}=\frac{q_2q_1+1}{q_2\cdot 1+0}=\frac{q_2P_1+P_0}{q_2Q_1+Q_0}=\frac{P_2}{Q_2},$$

$$\delta_3=\frac{\left(q_2+\frac{1}{q_3}\right)P_1+P_0}{\left(q_2+\frac{1}{q_3}\right)Q_1+Q_0}=\frac{q_3P_2+P_1}{q_3Q_2+Q_1}=\frac{P_3}{Q_3}$$

etc, y, en general,

$$\delta_s=\frac{q_sP_{s-1}+P_{s-2}}{q_sQ_{s-1}+Q_{s-2}}=\frac{P_s}{Q_s}.$$

Por lo tanto, los numeradores y denominadores de las fracciones reducidas los podemos calcular sucesivamente por las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} P_s=q_sP_{s-1}+P_{s-2}, \\ Q_s=q_sQ_{s-1}+Q_{s-2}. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Es útil realizar estos cálculos según el esquema siguiente $\Big($las últimas dos columnas se escriben solamente en el caso en que α es una fracción irreducible con el denominador positivo: $\alpha=\frac{a}{b}\Big)$:

q_s		q_1	q_2	$\dots$			$q_s\dots$		q_n
P_s	1	q_1	P_2	$\dots$	P_{s-2}	P_{s-1}	$P_s\dots$	P_{n-1}	a
Q_s	0	1	Q_2	$\dots$	Q_{s-2}	Q_{s-1}	$Q_s\dots$	Q_{n-1}	b

Ejemplo. Desarrollemos en fracción continua el número $\frac{105}{38}$. Aquí

$$\begin{array}{r|l} 105 & 38 \\ 76 & \overline{2} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 38 & 29 \\ 29 & \overline{1} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 29 & 9 \\ 27 & \overline{3} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ 8 & \overline{4} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ 2 & \overline{2} \end{array}$$

$$\frac{105}{38} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Por esto, el esquema indicado anteriormente da:

q_s		2	1	3	4	2
P_s	1	2	3	11	47	105
Q_s	0	1	1	4	17	38

e. Examinemos la diferencia $\delta_s - \delta_{s-1}$ de dos fracciones reducidas consecutivas. Para $s > 1$ hallamos

$$\delta_s - \delta_{s-1} = \frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}} = \frac{h_s}{Q_s Q_{s-1}},$$

donde $h_s = P_s Q_{s-1} - Q_s P_{s-1}$; poniendo en lugar de P_s y Q_s sus expresiones (2) y haciendo las simplificaciones evidentes, obtenemos $h_s = -h_{s-1}$. Esto último, junto con $h_1 = q_1 \cdot 0 - -1 \cdot 1 = -1$ da $h_s = (-1)^s$. Así, pues,

$$P_s Q_{s-1} - Q_s P_{s-1} = (-1)^s \qquad (s > 0), \tag{3}$$

$$\delta_s - \delta_{s-1} = \frac{(-1)^s}{Q_s Q_{s-1}} \qquad (s > 1). \tag{4}$$

Ejemplo. En la tabla del ejemplo expuesto en **d**, se tiene

$$105 \cdot 17 - 38 \cdot 47 = (-1)^5 = -1.$$

f. De (3) se deduce que (P_s, Q_s) divide a $(-1)^s = \pm 1$ (2, **b**, § 1). Por esto $(P_s, Q_s) = 1$, es decir, las *fracciones reducidas* $\frac{P_s}{Q_s}$ *son irreducibles.*

g. Supongamos que $s \geqslant 2$ y que δ_s no es igual a α. Las expresiones para δ_{s-1} y para δ_s se obtienen fácilmente de la expresión (1) para α: la primera, sustituyendo $\frac{1}{\alpha_s}$ por cero, la segunda, sustituyendo $\frac{1}{\alpha_s}$ por el número $\frac{1}{q_s}$. Pero de las igualdades indicadas en **a** para $\alpha_{s-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha$, fácilmente comprobamos que

al hacer la primera sustitución	al hacer la segunda sustitución
α_{s-1} disminuye,	α_{s-1} aumenta,
α_{s-2} aumenta,	α_{s-2} disminuye,
α_{s-3} disminuye,	α_{s-3} aumenta,
. . . .	. . . .

y que, finalmente, al hacer una de dichas sustituciones α disminuye, y al hacer la otra α aumenta. Esto último muestra que uno de los números δ_{s-1} y δ_s es menor que α, y el otro es mayor que α, y que, por lo tanto, *α está comprendido entre δ_{s-1} y δ_s.*

h. Se tiene

$$|\alpha - \delta_{s-1}| \leqslant \frac{1}{Q_s Q_{s-1}}.$$

En efecto, si $\delta_s = \alpha$ este aserto se deduce (con el signo de igualdad) de (4). Si δ_s no es igual a α, se deduce (con el signo de desigualdad) de *g* y de (4).

§ 5. Números primos

a. El número 1 sólo tiene un divisor positivo, precisamente 1. En este sentido el número 1 en la sucesión de números naturales, es particular.

Todo entero mayor que 1 tiene al menos dos divisores, precisamente 1 y él mismo; si con estos divisores se agotan todos

los divisores positivos del número entero, éste se llama *primo.* Un entero mayor que 1, que tenga además de 1 y de sí mismo otros divisores positivos, se llama *compuesto.*

b. *El divisor menor, distinto de la unidad, de un entero mayor que la unidad, es un número primo.*

En efecto, sea q el divisor menor, distinto de la unidad, de un entero $a > 1$. Si q fuese compuesto tendría un divisor q_1 con la condición $1 < q_1 < q$; pero el número a, siendo divisible por q, tendría que ser divisible también por q_1 (**1**, **b**, **§ 1**), y esto contradice a la hipótesis respecto del número q.

c. *El divisor menor, distinto de la unidad, de un número compuesto a (según* **b**, *tiene que ser primo) no es superior a $\sqrt{a}$.*

En efecto, sea q este divisor, entonces $a = qa_1$, $a_1 \geqslant q$, de donde, multiplicando y simplificando por a_1, obtenemos $a \geqslant q^2$, $q \leqslant \sqrt{a}$.

d. *La cantidad de números primos es infinita.*

La validez de este teorema se deduce de que, cualesquiera que sean los números primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_k$, se puede obtener un número primo nuevo que no está comprendido entre ellos. Tal es el divisor primo de la suma $p_1 p_2 \ldots p_k + 1$, el cual, dividiendo a toda la suma, no puede coincidir con ninguno de los primos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (**2**, **b**, **§ 1**).

e. Para formar la tabla de números primos que no superan a un número dado N, existe un método sencillo, denominado criba de Eratóstenes. Este consiste en lo siguiente.

Escribamos los números

$$1, 2, \ldots, N. \tag{1}$$

El primer número de esta sucesión que es mayor que la unidad es el 2; éste sólo es divisible por 1 y por sí mismo y, por consiguiente, es primo.

Borremos de la sucesión (1) (como compuestos) todos los números que son múltiplos de 2, a excepción del mismo 2. El primer número no borrado que le sucede al 2 es el 3; éste no es divisible por 2 (pues en caso contrario estaría borrado), por lo cual 3 sólo es divisible por 1 y por sí mismo y, por consiguiente, es primo.
Borramos de la sucesión (1) todos los números que son múltiplos de 3, a excepción del mismo 3. El primer número no borrado que le sucede al 3 es el 5; éste no es divisible por 2 ni por 3 (pues en caso contrario estaría borrado). Por consiguiente, 5 sólo es divisible por 1 y por sí mismo, por lo cual, también es primo. Etc.
Cuando se hayan borrado del modo indicado todos los números que son múltiplos de los números primos menores que un número primo p, todos los números no borrados, menores que p^2, serán primos. En efecto, cualquier número compuesto a, menor que p^2, ya está borrado, por ser múltiplo de su divisor primo menor, el cual $\leqslant \sqrt{a} < p$. De aquí se deduce que:
1. *Al comenzar a borrar los múltiplos de un número primo p, hay que empezar a borrar desde p^2.*
2. *La formación de la tabla de números primos $\leqslant N$ se termina en cuanto se hayan borrado todos los números compuestos que son múltiplos de los números primos que no son superiores a $\sqrt{N}$.*

§ 6. Unicidad de la descomposición en factores primos

a. *Todo entero a, o es primo con un número primo dado p, o es divisible por p.*
En efecto, (a, p), siendo un divisor de p, puede ser igual a 1 o a p. En el primer caso a es primo con p, en el segundo a es divisible por p.
b. *Si el producto de varios factores es divisible por p, al menos uno de los factores es divisible por p.*

En efecto, (**a**), cada factor es primo con p o es divisible por p. Si todos los factores fuesen primos con p, su producto (**3**, **f**, **§ 2**) sería primo con p; por esto, al menos uno de los factores es divisible por p.

c. *Todo entero, mayor que la unidad, se descompone en un producto de factores primos y, además, de modo único, si no se tiene en cuenta el orden de los factores.*

En efecto, sea a un entero, mayor que la unidad; designando con la letra p_1 su divisor primo menor, se tiene $a = p_1 a_1$. Si $a_1 > 1$, designando con la letra p_2 su divisor primo menor, se tiene $a_1 = p_2 a_2$. Si $a_2 > 1$, de un modo semejante se obtiene $a_2 = p_3 a_3$, etc, y así hasta que se llegue a obtener un número a_n igual a la unidad. Entonces $a_{n-1} = p_n$. Multiplicando todas las igualdades obtenidas y efectuando la simplificación, resulta la siguiente descomposición del número a en factores primos:

$$a = p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Supongamos que para el mismo número a existe también una segunda descomposición en factores primos $a = q_1 q_2 \ldots \ldots q_s$. Entonces

$$p_1 p_2 \ldots p_n = q_1 q_2 \ldots q_s.$$

El segundo miembro de esta igualdad es divisible por q_1. Por lo tanto (**b**), al menos uno de los factores del primer miembro tiene que ser divisible por q_1. Supongamos, por ejemplo, que p_1 es divisible por q_1 (el orden de numeración de los factores está a cargo nuestro); entonces $p_1 = q_1$ (p_1 además de 1 es divisible por p_1). Simplificando ambos miembros de la igualdad por $p_1 = q_1$, se tiene $p_2 p_3 \ldots p_n = q_2 q_3 \ldots q_s$. Repitiendo el razonamiento anterior para esta igualdad, obtenemos $p_3 \ldots p_n = q_3 \ldots q_s$, etc. Continuamos así hasta que al fin y al cabo en un miembro de la igualdad, por ejemplo, en el primero, se simplifiquen todos los factores. Pero simultáneamente tienen que simplificarse

también todos los factores del segundo miembro, puesto que la igualdad $1 = q_{n+1} \ldots q_s$ siendo $q_{n+1}, \ldots, q_s$ superiores a 1, es imposible.

Por lo tanto, la segunda descomposición en factores primos es idéntica a la primera.

d. En la descomposición del número a en factores primos algunos de ellos pueden repetirse. Designando con las letras $p_1, p_2, \ldots, p_k$ los primos distintos que figuran en dicha descomposición y con las letras $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sus órdenes de multiplicidad en a, obtenemos la llamada *descomposición canónica del número a en factores*:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

Ejemplo. La descomposición canónica del número 588 000 es: $588\,000 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$.

e. *Sea* $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ *la descomposición canónica del número a. Entonces todos los divisores de a son todos los números de la forma*

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}; \qquad (1)$$

$$0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1, \ 0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2, \ \ldots, \ 0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k.$$

En efecto, supongamos que d divide a a. Entonces (**b**, **§ 1**) $a = dq$ y, por consiguiente, todos los divisores primos de d figuran en la descomposición canónica de a con exponentes no menores que los exponentes con que ellos mismos figuran en la descomposición canónica de d. Por esto d tiene la forma (1).

Recíprocamente, todo número d de la forma (1) es, evidentemente, un divisor de a.

Ejemplo. Se obtienen todos los divisores del número $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ haciendo recorrer en la expresión $2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$ a $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, independientemente unos de otros, los valores $\beta_1 = 0, 1, 2, 3, 4$; $\beta_2 = 0, 1, 2$; $\beta_3 = 0, 1$. Por esto, los

divisores indicados son: 1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 48, 9, 18, 36, 72, 144, 5, 10, 20, 40, 80, 15, 30, 60, 120, 240, 45, 90, 180, 360, 720.

Preguntas referentes al capítulo I

1. Sean a y b enteros, no simultáneamente iguales a cero, y sea $d = ax_0 + by_0$ el número positivo menor de la forma $ax + by$ (x e y son enteros). Demostrar que $d = (a, b)$. Deducir de aquí el teorema **1, d, § 2** y los teoremas **e, § 2**. Generalizar estos resultados, considerando los números de la forma $ax + by + \ldots + fu$.

2. Demostrar que la fracción reducida δ_s representa al número α con más exactitud que cualquier fracción irreducible $\frac{k}{l}$ que cumpla la condición $0 < l < Q_s$.

3. Supongamos que el número real α se ha desarrollado en una fracción continua; sea N un entero positivo, k el número de sus cifras decimales y n el entero mayor que cumple la condición $Q_n \leqslant N$. Demostrar que $n \leqslant 5k + 1$. Para la demostración se deben comparar las expresiones para Q_2, Q_3, Q_4, ..., Q_n con las que éstos tendrían si todos los q_s fuesen iguales a 1, y comparar luego con los números 1, ξ, ξ^2, ..., ξ^{n-1}, donde ξ es la raíz positiva de la ecuación $\xi^2 = \xi + 1$.

4. Sea $\tau \geqslant 1$. Una sucesión de fracciones racionales irreducibles, dispuestas en orden de crecimiento, con denominadores positivos no superiores a τ, se llama *sucesión de Farey correspondiente a* τ.

a. Demostrar que la parte de la sucesión de Farey correspondiente a τ, que contiene fracciones α con la condición $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, puede obtenerse del modo siguiente: escribimos las fracciones $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$. Si $2 \leqslant \tau$, entonces entre estas fracciones introducimos también la fracción $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$,

después, en la sucesión obtenida $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$ entre cada dos fracciones consecutivas $\frac{a_1}{b_1}$ y $\frac{c_1}{d_1}$ con $b_1+d_1 \leqslant \tau$ introducimos la fracción $\frac{a_1+c_1}{b_1+d_1}$, etc, y así continuamos siempre que esto sea posible. Demostrar previamente que para cualquier par de fracciones consecutivas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ de la sucesión obtenida de este modo, se tiene $ad-bc=-1$.

b. Considerando la sucesión de Farey, demostrar el teorema: sea $\tau \geqslant 1$, entonces cualquier número real α se puede expresar en la forma

$$\alpha = \frac{P}{Q} + \frac{\theta}{Q\tau}; \quad 0 < Q \leqslant \tau, \quad (P, Q) = 1, \quad |\theta| < 1.$$

c. Demostrar el teorema de la pregunta **b**, aplicando **g**, § **4**.

5, a. Demostrar que hay una cantidad infinita de números primos de la forma $4m+3$.

b. Demostrar que hay una cantidad infinita de números primos de la forma $6m+5$.

6. Demostrar que la cantidad de números primos es infinita, calculando para ello la cantidad de números, no superiores a N, en cuyas descomposiciones canónicas no figuran números primos distintos de $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

7. Sea K un número entero positivo. Demostrar que en la sucesión de números naturales hay un conjunto infinito de sucesiones $M, M+1, \ldots, M+K-1$, que no contienen números primos.

8. Demostrar que entre los números representados por el polinomio $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, donde $n > 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son enteros y $a_0 > 0$, hay un conjunto infinito de números compuestos.

9, a. Demostrar que a la ecuación indeterminada

$$x^2 + y^2 = z^2,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ (x, y, z) = 1 \quad (1)$$

satisfacen aquellos sistemas x, y, z, y sólo aquéllos, en los

que uno de los números x e y tiene la forma $2uv$, el otro tiene la forma $u^2 - v^2$ y, finalmente, z tiene la forma $u^2 + v^2$; en este caso $u > v > 0$, $(u, v) = 1$; uv es par.
b. Aplicando el teorema de la pregunta **a**, demostrar que la ecuación $x^4 + y^4 = z^2$ es irresoluble en enteros positivos x, y, z.
10. Demostrar el teorema: si la ecuación $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$, donde $n > 0$ y $a_1, \dots, a_n$ son enteros, tiene una raíz racional, esta raíz es un número entero.
11, a. Sea $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$; $n > 1$. Demostrar que S no es entero.
b. Sea $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}$; $n > 0$. Demostrar que S no es entero.
12. Sea n entero, $n > 0$. Demostrar que todos los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton $(a + b)^n$ son impares cuando, y sólo cuando, n tiene la forma $2^k - 1$.

Ejercicios numéricos referentes al capítulo I

1, a. Aplicando el algoritmo de Euclides, hallar (6 188, 4 709).
b. Hallar (81 719, 52 003, 33 649, 30 107).
2, a. Desarrollando el número $\alpha = \frac{125}{92}$ en fracción continua y formando la tabla de fracciones reducidas (**d**, § **4**), hallar: α) δ_4, β) la expresión de α en la forma indicada en la pregunta **4, b**, considerando $\tau = 20$.
b. Desarrollando $\alpha = \frac{5391}{3976}$ en fracción continua y formando la tabla de fracciones reducidas, hallar: α) δ_6, β) la expresión de α en la forma indicada en la pregunta **4, b**, considerando $\tau = 1\,000$.
3. Formar la sucesión de fracciones de Farey (pregunta **4**) desde 0 hasta 1, excluyendo 1, con los denominadores no superiores a 8.
4. Formar la tabla de números primos menores de 100.
5, a. Hallar la descomposición canónica del número 82 798 848.
b. Hallar la descomposición canónica del número 81 057 226 635 000.

CAPITULO SEGUNDO

Las funciones más importantes de la teoría de los números

§ 1. Funciones $[x]$, $\{x\}$

a. En la teoría de los números desempeña un papel importante la función $[x]$; ésta se define para todos los valores reales de x y representa el entero mayor, no superior a x. Esta función se llama *parte entera de x.*

Ejemplos.

$$[7] = 7; \quad [2,6] = 2; \quad [-4,75] = -5.$$

A veces se considera también la función $\{x\} = x - [x]$. Esta función se llama *parte fraccionaria de x.*

Ejemplos.

$$\{7\} = 0; \quad \{2,6\} = 0,6; \quad \{-4,75\} = 0,25.$$

b. Para mostrar la utilidad de las funciones introducidas, demostremos el teorema:

El exponente, con el que un número primo dado p figura en el producto n!, es igual a

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\dots$$

En efecto, el número de factores en el producto $n!$ que son múltiplos de p, es igual a $\left[\frac{n}{p}\right]$, entre ellos, múltiplos de p^2 hay $\left[\frac{n}{p^2}\right]$; entre estos últimos, múltiplos de p^3 hay

$\left[\frac{n}{p^3}\right]$, etc. La suma de los números indicados da precisamente el exponente buscado, puesto que cada factor en el producto $n!$ que sea múltiplo de p^m, pero no de p^{m+1}, se cuenta del modo indicado m veces, como múltiplo de p, p^2, p^3, ..., y, finalmente, de p^m.

Ejemplo. El exponente con el que el múmero 3 figura en el producto 40! es igual a

$$\left[\frac{40}{3}\right]+\left[\frac{40}{9}\right]+\left[\frac{40}{27}\right]=13+4+1=18.$$

§ 2. Sumas extendidas a los divisores de un número

a. En la teoría de los números desempeñan un papel particularmente importante las funciones multiplicativas. Una función $\theta(a)$ se llama *multiplicativa*, si se cumplen las condiciones siguientes:

1. *La función $\theta(a)$ está definida para todos los enteros positivos a y no se anula para ningún a de éstos.*
2. *Para cualesquiera positivos a_1 y a_2, primos entre sí, se tiene*

$$\theta(a_1a_2)=\theta(a_1)\,\theta(a_2).$$

Ejemplo. Fácilmente se observa que es multiplicativa la función $\theta(a)=a^s$, donde s es un número real o complejo arbitrario.

b. De las propiedades indicadas de la función $\theta(a)$ se deduce, en particular, que $\theta(1)=1$. En efecto, supongamos que $\theta(a_0)$ no es igual a cero, entonces $\theta(a_0)=\theta(1\cdot a_0)=$ $=\theta(1)\,\theta(a_0)$, es decir, $\theta(1)=1$. Además, resulta la siguiente propiedad importante: si $\theta_1(a)$ y $\theta_2(a)$ son funciones multiplicativas, entonces $\theta_0(a)=\theta_1(a)\,\theta_2(a)$ también es una función multiplicativa. En efecto, se tiene

$$\theta_0(1)=\theta_1(1)\,\theta_2(1)=1.$$

Además, para $(a_1, a_2) = 1$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\theta_0 (a_1 a_2) &= \theta_1 (a_1 a_2)\, \theta_2 (a_1 a_2) = \\ &= \theta_1 (a_1)\, \theta_1 (a_2)\, \theta_2 (a_1)\, \theta_2 (a_2) = \\ &= \theta_1 (a_1)\, \theta_2 (a_1)\, \theta_1 (a_2)\, \theta_2 (a_2) = \\ &= \theta_0 (a_1)\, \theta_0 (a_2).\end{aligned}$$

c. *Sea* $\theta(\alpha)$ *una función multiplicativa y sea* $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ $\ldots p_k^{\alpha_k}$ *la descomposición canónica del número* a. *Designando con la notación* $\sum\limits_{d \diagdown a}$ *la suma, extendida a todos los divisores* d *del número* a, *se tiene*

$$\sum_{d \diagdown a} \theta (d) = (1 + \theta (p_1) + \theta (p_1^2) + \ldots + \theta (p_1^{\alpha_1})) \ldots$$
$$\ldots (1 + \theta (p_k) + \theta (p_k^2) + \ldots + \theta (p_k^{\alpha_k}))$$

(en el caso $a = 1$ *se supone que el segundo miembro es igual a* 1).

Para demostrar esta identidad, abramos los paréntesis en el segundo miembro. Se obtiene una suma de términos de la forma

$$\theta (p_1^{\beta_1})\, \theta (p_2^{\beta_2}) \ldots \theta (p_k^{\beta_k}) = \theta (p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k});$$
$$0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1,\ 0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2,\ \ldots,\ 0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k,$$

donde ninguno de tales términos se omite y no se repite más de una vez; esto es (**e**, **§ 6**, **cap. I**), precisamente, lo que figura en el primer miembro.

d. Para $\theta (a) = a^s$ la identidad **c** toma la forma

$$\sum_{d \diagdown a} d^s = (1 + p_1^s + p_1^{2s} + \ldots + p_1^{\alpha_1 s}) \ldots$$
$$\ldots (1 + p_k^s + p_k^{2s} + \ldots + p_k^{\alpha_k s}). \qquad (1)$$

En particular, para $s = 1$ el primer miembro de (1) representa la *suma de los divisores* $S (a)$ del número a. Simplificando el segundo miembro, obtenemos:

$$S (a) = \frac{p_1^{\alpha_1 + 1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2 + 1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k + 1} - 1}{p_k - 1}.$$

Ejemplo.

$$S(720)=S(2^4\cdot 3^2\cdot 5)=\frac{2^{4+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^{1+1}-1}{5-1}=2\,418.$$

Para $s=0$ el primer miembro de (1) representa el *número de divisores* $\tau(a)$ del número a, y se tiene:

$$\tau(a)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1).$$

Ejemplo.

$$\tau(720)=(4+1)(2+1)(1+1)=30.$$

§ 3. Función de Möbius **a.** *La función de Möbius* $\mu(a)$ se define para todos los enteros positivos a. Esta se determina por las igualdades: $\mu(a)=0$ si a es divisible por un cuadrado distinto de la unidad; $\mu(a)=(-1)^k$, si a no es divisible por un cuadrado distinto de la unidad, donde k denota el número de divisores primos del número a; en particular, para $a=1$ se considera $k=0$, por lo cual admitimos que $\mu(1)=1$.

Ejemplos.

$$\mu(1)=1,\quad \mu(5)=-1,\quad \mu(9)=0,$$
$$\mu(2)=-1,\quad \mu(6)=1,\quad \mu(10)=1,$$
$$\mu(3)=-1,\quad \mu(7)=-1,\quad \mu(11)=-1,$$
$$\mu(4)=0,\quad \mu(8)=0,\quad \mu(12)=0.$$

b. Sea $\theta(a)$ una *función multiplicativa y sea*

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$$

la descomposición canónica del número a. Entonces

$$\sum_{d\diagdown a}\mu(d)\,\theta(d)=(1-\theta(p_1))(1-\theta(p_2))\ldots(1-\theta(p_k)).$$

(*En el caso $a=1$ se supone que el segundo miembro es igual a* 1).

En efecto, la función $\mu(a)$, evidentemente, es multiplicativa. Por esto, es multiplicativa también la función $\theta_1(a)=$ $=\mu(a)\,\theta(a)$. Aplicando a esta última la identidad **c**, **§ 2**

y teniendo en cuenta que $\theta_1(p) = -\theta(p)$; $\theta_1(p^s) = 0$ para $s > 1$, nos convencemos de que el teorema es justo.

c. En particular, haciendo $\theta(a) = 1$, de **b** obtenemos

$$\sum_{d \diagdown a} \mu(d) = \begin{cases} 0, & \text{si } a > 1, \\ 1, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Haciendo $\theta(d) = \frac{1}{d}$, resulta

$$\sum_{d \diagdown a} \frac{\mu(d)}{d} = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right), & \text{si } a > 1, \\ 1, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

d. *Supongamos que a los enteros positivos*

$$\delta = \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$$

les corresponden cualesquiera valores reales o complejos $f = f_1, f_2, \ldots, f_n$. *Entonces, designando con la notación* S' *la suma de los valores* f *que corresponden a los valores iguales a 1, y con la notación* S_d *la suma de los valores* f *que corresponden a los valores* δ *que son múltiplos de* d, *se tiene*

$$S' = \sum \mu(d) S_d,$$

donde d *recorre todos los números enteros positivos que dividen al menos un valor* δ.

En efecto, en virtud de **c**, se tiene

$$S' = f_1 \sum_{d \diagdown \delta_1} \mu(d) + f_2 \sum_{d \diagdown \delta_2} \mu(d) + \ldots + f_n \sum_{d \diagdown \delta_n} \mu(d).$$

Reuniendo todos los términos con un mismo valor de d y sacando fuera de paréntesis $\mu(d)$, obtendremos entre paréntesis la suma de aquellos números f, y sólo aquéllos, cuyos δ correspondientes son múltiplos de d, y esto es precisamente S_d.

§ 4. Función de Euler

a. *La función de Euler* $\varphi(a)$ se define para todos los enteros positivos a y representa la cantidad de números de la sucesión

$$0, 1, \ldots, a - 1 \qquad (1)$$

que son primos con a.

Ejemplos.

$$\varphi(1)=1, \quad \varphi(4)=2,$$
$$\varphi(2)=1, \quad \varphi(5)=4,$$
$$\varphi(3)=2, \quad \varphi(6)=2.$$

b. *Sea*

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k} \tag{2}$$

la descomposición canónica del número a. Entonces

$$\varphi(a)=a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right), \tag{3}$$

o también

$$\varphi(a)=(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1})(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1})\ldots(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}); \tag{4}$$

en particular,

$$\varphi(p^{\alpha})=p^{\alpha}-p^{\alpha-1}, \quad \varphi(p)=p-1. \tag{5}$$

En efecto, apliquemos el teorema **d**, § **3**. En este caso, los números δ_k y los números f_k los definimos así: Supongamos que k recorre los números de la sucesión (1). Hagamos $\delta_k = (k, a)$ y a cada valor δ_k le ponemos en correspondencia el número $f_k = 1$.
Entonces S' será igual al número de valores de $\delta_k = (k, a)$ que son iguales a 1, es decir, será igual a $\varphi(a)$, mientras que S_d será igual al número de valores de $\delta_k = (k, a)$ que son múltiplos de d. Pero (k, a) puede ser múltiplo de d solamente bajo la condición de que d sea un divisor de a. Cumpliéndose esta condición, S_d será igual al número de valores de k que son múltiplos de d, es decir, será igual a $\frac{a}{d}$. Así, pues, resulta

$$\varphi(a)=\sum_{d\diagdown a}\mu(d)\frac{a}{d},$$

de donde, en virtud de **c**, § **3**, se deduce la fórmula (3), y de esta última, en virtud de (2), se deduce la fórmula (4).

Ejemplos.

$$\varphi(60) = 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 16;$$

$$\varphi(81) = 81 - 27 = 54;$$

$$\varphi(5) = 5 - 1 = 4.$$

c. *La función* $\varphi(a)$ *es multiplicativa.*

En efecto, para $(a_1, a_2) = 1$ de **b**, evidentemente, se deduce que

$$\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\,\varphi(a_2).$$

Ejemplo. $\varphi(405) = \varphi(81)\,\varphi(5) = 54 \cdot 4 = 216.$

d. $\sum_{d \diagdown a} \varphi(d) = a.$

Para verificar esta fórmula, aplicamos la identidad **c**, § **2**, la cual para $\theta(a) = \varphi(a)$ da

$$\sum_{d \diagdown a} \varphi(d) = (1 + \varphi(p_1) + \varphi(p_1^2) + \ldots + \varphi(p_1^{\alpha_1}))\ldots$$
$$\ldots(1 + \varphi(p_k) + \varphi(p_k^2) + \ldots + \varphi(p_k^{\alpha_k})).$$

En virtud de (5) el segundo miembro se escribe así:

$$(1 + (p_1 - 1) + (p_1^2 - p_1) + \ldots + (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}))\ldots$$
$$\ldots(1 + (p_k - 1) + (p_k^2 - p_k) + \ldots + (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1})),$$

lo cual, después de reducir los términos semejantes en cada paréntesis grande, resulta ser igual a $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} = a.$

Ejemplo. Haciendo $a = 12$, hallamos

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) =$$
$$= 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12.$$

Preguntas referentes al capítulo II

1, a. Supongamos que en el intervalo $Q \leqslant x \leqslant R$ la función $f(x)$ es continua y no negativa. Demostrar que la suma

$$\sum_{Q < x \leqslant R} [f(x)]$$

expresa el número de puntos enteros (puntos de coordenadas enteras) de la región plana: $Q < x \leqslant R,\ 0 < y \leqslant f(x)$.

b. Sean P y Q números positivos impares, primos entre sí. Demostrar que

$$\sum_{0<x<\frac{Q}{2}} \left[\frac{P}{Q}x\right] + \sum_{0<y<\frac{P}{2}} \left[\frac{Q}{P}y\right] = \frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}.$$

c. Supongamos que $r > 0$ y sea T el número de puntos enteros que hay en la región $x^2 + y^2 \leqslant r^2$. Demostrar que

$$T = 1 + 4[r] + 8 \sum_{0<x\leqslant\frac{r}{\sqrt{2}}} [\sqrt{r^2-x^2}] - 4\left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right]^2.$$

d. Supongamos que $n > 0$ y sea T el número de puntos enteros que hay en la región $x > 0,\ y > 0,\ xy \leqslant n$. Demostrar que

$$T = 2 \sum_{0<x\leqslant\sqrt{n}} \left[\frac{n}{x}\right] - [\sqrt{n}]^2.$$

e. Consideremos un polígono, cuyos vértices son puntos enteros y cuyo contorno no se corta consigo mismo y no es tangente a sí mismo. Sea S el área del polígono y $T = \sum \delta - 1$, donde la sumación se extiende a todos los puntos enteros que están situados en el interior del polígono y en su contorno, siendo $\delta = 1$ para los puntos interiores y $\delta = 0{,}5$ para los puntos del contorno. Demostrar que $T = S$.

2. Supongamos que $n > 0$, m es entero, $m > 1$ y x recorre los números enteros positivos que no son divisibles por la m-ésima potencia de un entero superior a 1. Demostrar que

$$\sum_{n} \left[\sqrt[m]{\frac{n}{x}}\right] = [n].$$

3. Supongamos que los números positivos α y β son tales que

$$[\alpha x]; \quad x=1, 2, \ldots; \quad [\beta y]; \quad y=1, 2, \ldots$$

forman conjuntamente todos los números de la sucesión natural sin repeticiones. Demostrar que esto se cumple cuando, y sólo cuando, α es irracional y

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1.$$

4, a. Sea $[\tau] \geqslant 1$, $t=[\tau]$ y sean $x_1, x_2, \ldots, x_t$ los números $1, 2, \ldots, t$, dispuestos en tal orden que los números

$$0, \quad \{\alpha x_1\}, \quad \{\alpha x_2\}, \ldots, \{\alpha x_t\}, \quad 1$$

no decrezcan. Demostrar el teorema de la pregunta **4, b,** cap. **I**, considerando las diferencias de los números consecutivos de la última sucesión.

b. Sean $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ números reales, cada uno de los cuales no es menor que 1; supongamos que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ son reales. Demostrar que existen unos números enteros $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, no simultáneamente iguales a cero, y un número entero η, que satisfacen a las condiciones:

$$|\xi_1| \leqslant \tau_1, \quad |\xi_2| \leqslant \tau_2, \ldots, |\xi_k| \leqslant \tau_k, (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \eta)=1,$$

$$|\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\ldots+\alpha_k\xi_k-\eta| < \frac{1}{\tau_1\tau_2 \ldots \tau_k}.$$

5. Sea α real y c entero, $c>0$. Demostrar que

$$\left[\frac{[\alpha]}{c}\right]=\left[\frac{\alpha}{c}\right].$$

6, a. Sean $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ números reales. Demostrar que

$$[\alpha+\beta+\ldots+\lambda] \geqslant [\alpha]+[\beta]+\ldots+[\lambda].$$

b. Supongamos que $a, b, \ldots, l$ son enteros positivos, $a+b+\ldots+l=n$. Aplicando **b, § 1,** demostrar que

$$\frac{n!}{a!\, b! \ldots l!}$$

es un número entero.

7. Supongamos que h es entero, $h>0$, p es primo y

$$u_s=\frac{p^{s+1}-1}{p-1}.$$

Representando h en la forma $h = p_m u_m + p_{m-1}u_{m-1} + \ldots + p_1u_1 + p_0$, donde u_m es el máximo u_s no superior a h, $p_m u_m$ es el máximo múltiplo de u_m no superior a h, $p_{m-1}u_{m-1}$ es el máximo múltiplo de u_{m-1} no superior a $h - p_m u_m$, $p_{m-2}u_{m-2}$ es el máximo múltiplo de u_{m-2} no superior a $h - p_m u_m - p_{m-1}u_{m-1}$, etc, demostrar que los números a que satisfacen a la condición de que en la descomposición canónica de $a!$ el número p figura con el exponente h, existen cuando, y sólo cuando, todos los números p_m, $p_{m-1}, \ldots, p_1, p_0$ soñ menores que p; además, en este caso los números a indicados son todos los de la forma

$$a = p_m p^{m+1} + p_{m-1}p^m + \ldots + p_1p^2 + p_0p + p',$$

donde p' toma los valores: $0, 1, \ldots, p-1$.

8, a. Supongamos que en el intervalo $Q \leqslant x \leqslant R$ la función $f(x)$ admite derivada segunda continua. Haciendo

$$\rho(x)=\frac{1}{2}-\{x\},\quad \sigma(x)=\int_0^x \rho(z)\,dz,$$

demostrar que (fórmula de Sonin)

$$\sum_{Q<x\leqslant R} f(x)=\int_Q^R f(x)\,dx+\rho(R)f(R)-\rho(Q)f(Q)-$$

$$-\sigma(R)f'(R)+\sigma(Q)f'(Q)+\int_Q^R \sigma(x)f''(x)\,dx.$$

b. Supongamos que se cumple la condición de la pregunta **a** para R arbitrariamente grandes, y que la integral

$\int_Q^\infty |f''(x)|\, dx$ es convergente. Demostrar que

$$\sum_{Q<x\leq R} f(x) =$$

$$= C + \int_Q^R f(x)\, dx + \rho(R) f(R) - \sigma(R) f'(R) - \int_R^\infty \sigma(x) f''(x)\, dx.$$

donde C no depende de R.

c. Si B toma solamente valores positivos y la razón $\frac{|A|}{B}$ permanece acotada superiormente, se escribe $A = O(B)$. Sea n entero, $n > 1$. Demostrar que

$$\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n).$$

9, a. Sea $n \geqslant 2$, $\Theta(z, z_0) = \sum_{z_0<p\leq z} \ln p$, donde p recorre los números primos. Sea también $\Theta(z) = \Theta(z, 0)$ y para $x > 0$

$$\psi(x) = \Theta(x) + \Theta(\sqrt{x}) + \Theta(\sqrt[3]{x}) + \ldots$$

Demostrar que

α) $\ln([n]!) = \psi(n) + \psi\left(\frac{n}{2}\right) + \psi\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots;$

β) $\psi(n) < 2n;$

γ) $\Theta\left(n, \frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{3}, \frac{n}{4}\right) + \Theta\left(\frac{n}{5}, \frac{n}{6}\right) + \ldots =$

$$= n \ln 2 + O(\sqrt{n}).$$

b. Para $n > 2$, demostrar que

$$\sum_{p\leq n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1),$$

donde p recorre números primos.

c. Sea ε una constante positiva arbitraria. Demostrar que en la sucesión de números naturales existe un conjunto infinito de pares de números primos p_n, p_{n+1} que satisfacen a la condición

$$p_{n+1} < p_n (1 + \varepsilon).$$

d. Sea $n > 2$. Demostrar que

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = C + \ln \ln n + O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

donde p recorre números primos y C no depende de n.
e. Sea $n > 2$. Demostrar que

$$\prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{C_0}{\ln n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right),$$

donde p recorre números primos y C_0 no depende de n.
f. Demostrar la existencia de una constante $s_0 > 2$ con la condición de que para cualquier entero $s > s_0$, para el s-ésimo número primo p_s de la sucesión 2, 3, 5, . . . se verifica la desigualdad

$$p_s < 1{,}5 s \ln s.$$

g. Demostrar que

$$\frac{a}{\varphi(a)} = O(\ln \ln a).$$

10, a. Sea $\theta(a)$ una función multiplicativa. Demostrar que $\theta_1(a) = \sum_{d \backslash a} \theta(d)$ también es una función multiplicativa.
b. Supongamos que la función $\theta(a)$ está definida para todos los enteros positivos a y que la función $\psi(a) = \sum_{d \backslash a} \theta(a)$ es multiplicativa. Demostrar que la función $\theta(a)$ también es multiplicativa.
11. Supongamos que, para $m > 0$, $\tau_m(a)$ denota el número de soluciones de la ecuación indeterminada $x_1 x_2 \ldots x_m = a$ ($x_1, x_2, \ldots, x_m$ recorren los números enteros positivos

independientemente uno de otro); en particular, es evidente que $\tau_1(a) = 1$, $\tau_2(a) = \tau(a)$. Demostrar que
a. $\tau_m(a)$ es una función multiplicativa.
b. Sea p un número primo, $\alpha \geqslant 0$ y $m > 1$. Entonces

$$\tau_m(p^\alpha) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)}{1\cdot 2\ldots(m-1)}.$$

c. Si ε es una constante positiva arbitraria, se tiene

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\tau_m(a)}{a^\varepsilon} = 0.$$

d. $\sum_{0<a\leqslant n} \tau_m(a)$ expresa el número de soluciones de la desigualdad $x_1x_2\ldots x_m \leqslant n$ en números enteros positivos x_1, $x_2, \ldots, x_m$.
12. Supongamos que $R(s)$ representa la parte real del número s.
Si $R(s) > 1$, hacemos $\zeta(s) = \sum_{n=1} \frac{1}{n^s}$. Sea $m > 0$, m es entero. Demostrar que

$$(\zeta(s))^m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_m(n)}{n^s}.$$

13, a. Siendo $R(s) > 1$, demostrar que

$$\zeta(s) = \prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

donde p recorre todos los números primos.
b. Demostrar que la cantidad de números primos es infinita, basándose en la divergencia de la serie armónica.
c. Demostrar que la cantidad de números primos es infinita, basándose en la irracionalidad del número $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.
14. Sea $\Lambda(a) = \ln p$ para $a = p^l$, donde p es primo y l es un entero positivo; $\Lambda(a) = 0$ para los otros enteros posi-

tivos a. Siendo $R(s)>1$, demostrar que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

15. Sea $R(s)>1$. Demostrar que

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

donde p recorre los números primos.

16, a. Sea $n\geqslant 1$. Aplicando **d, § 3**, demostrar que

$$1=\sum_{0<d\leqslant n}\mu(d)\left[\frac{n}{d}\right].$$

b. Sea $M(z, z_0)=\sum_{z_0<a\leqslant z}\mu(a)$; $M(x)=M(x, 0)$. Demostrar que

$$\alpha)\quad M(n)+M\left(\frac{n}{2}\right)+M\left(\frac{n}{3}\right)+\ldots=1,\ n\geqslant 1,$$

$$\beta)\quad M\left(n, \frac{n}{2}\right)+M\left(\frac{n}{3}, \frac{n}{4}\right)+M\left(\frac{n}{5}, \frac{n}{6}\right)+$$
$$+\ldots=-1,\ n\geqslant 2.$$

c. Supongamos que $n\geqslant 1$, l es entero, $l>1$, $T_{l,n}$ es el número de enteros x con la condición $0<x\leqslant n$, que no son divisibles por la l-ésima potencia de un entero superior a 1. Aplicando **d, § 3**, demostrar que

$$T_{l,n}=\sum_{d=1}^{\infty}\mu(d)\left[\frac{n}{d^l}\right].$$

17, a. Supongamos que a es entero, $a>0$, y que para los enteros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se ha definido unívocamente una función $f(x)$. Demostrar que

$$S'=\sum_{d\backslash a}\mu(d)S_d,$$

donde S' denota la suma de los valores de $f(x)$, extendida a los valores de x que son primos con a, y S_d es la suma de

los valores de $f(x)$, extendida a los valores de x que son múltiplos de d.

b. Supongamos que $k > 1$ y que se han dado los sistemas

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_k; \quad x''_1, x''_2, \ldots, x''_k; \quad \ldots; \quad x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)},$$

donde cada uno de ellos consta de números enteros no simultáneamente iguales a cero. Supongamos también que para estos sistemas se ha definido unívocamente una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Demostrar que

$$S' = \sum \mu(d) S_d,$$

donde S' denota la suma de los valores de $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, extendida a los sistemas de números primos entre sí, y S_d es la suma de los valores de $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, extendida a los sistemas de números que son simultáneamente múltiplos de d. Aquí d recorre números enteros positivos.

c. Supongamos que a es entero, $a > 0$, y que para los divisores δ del número a se ha definido unívocamente una función $F(\delta)$. Haciendo

$$G(\delta) = \sum_{d \diagdown \delta} F(d),$$

demostrar que (la ley de inversión para las funciones numéricas)

$$F(a) = \sum_{d \diagdown a} \mu(d) G\left(\frac{a}{d}\right).$$

d. Supongamos que a los enteros positivos

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$$

les corresponden cualesquiera números reales o complejos, no iguales a cero:

$$f_1, f_2, \ldots, f_n.$$

Demostrar que

$$P' = \prod P_d^{\mu(d)},$$

donde P' denota el producto de los valores f que corresponden a los valores δ que son iguales a 1, P_d denota el producto

de los valores f que corresponden a los valores δ que son múltiplos de d, y d recorre todos los números enteros positivos que dividen al menos a un δ.

18. Supongamos que a es entero, $a > 1$, $\sigma_m(n) = 1^m + 2^m + \ldots + n^m$, $\psi_m(a)$ es la suma de las m-ésimas potencias de los números de la sucesión $1, 2, \ldots, a$ que son primos con a; $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son los divisores primos del número a.

a. Aplicando el teorema de la pregunta **17, a,** demostrar que

$$\psi_m(a) = \sum_{d \diagdown a} \mu(d)\, d^m \sigma_m\left(\frac{a}{d}\right).$$

b. Demostrar que

$$\psi_1(a) = \frac{a}{2}\varphi(a).$$

c. Demostrar que

$$\psi_2(a) = \left(\frac{a^2}{3} + \frac{(-1)^k}{6} p_1 p_2 \ldots p_k\right)\varphi(a).$$

19. Supongamos que $z > 1$, a es entero, $a > 0$, T_z es la cantidad de números x con las condiciones $0 < x \leqslant z$, $(x, a) = 1$, ε es una constante positiva arbitraria.

a. Demostrar que

$$T_z = \sum_{d \diagdown a} \mu(d)\left[\frac{z}{d}\right].$$

b. Demostrar que

$$T_z = \frac{z}{a}\varphi(a) + O(a^\varepsilon).$$

c. Supongamos que $z > 1$, $\pi(z)$ denota la cantidad de números primos no superiores a z, a es el producto de los números primos no superiores a $\sqrt{z}$. Demostrar que

$$\pi(z) = \pi(\sqrt{z}) - 1 + \sum_{d \diagdown a} \mu(d)\left[\frac{z}{d}\right].$$

20. Supongamos $R(s) > 1$, a es entero, $a > 0$. Demostrar que

$$\sum{}' \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \prod \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

donde n recorre en el primer miembro los números enteros positivos que son primos con a, y p recorre en el segundo miembro todos los divisores primos del número a.

21, a. La probabilidad P de que k números enteros positivos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sean primos entre sí, la definiremos como el límite para $N \to \infty$ de la probabilidad P_N de que sean primos entre sí k números $x_1, x_2, \ldots x_k$, a cada uno de los cuales, independientemente de los demás, se le ha asignado uno de los valores $1, 2, \ldots, N$, los cuales se consideran como valores igualmente posibles. Aplicando el teorema de la pregunta **17, b**, demostrar que $P = (\zeta(k))^{-1}$.

b. Definiendo la probabilidad P de que la fracción $\frac{x}{y}$ sea irreducible del mismo modo que en la pregunta **a** para $k = 2$, demostrar que

$$P = \frac{6}{\pi^2}.$$

22, a. Supongamos que $r \geqslant 2$, y sea T el número de puntos enteros (x, y) situados en la región $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, y cuyas coordenadas son números primos entre sí. Demostrar que

$$T = \frac{6}{\pi} r^2 + O(r \ln r).$$

b. Supongamos que $r \geqslant 2$, y sea T el número de puntos enteros (x, y, z) situados en la región $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2$, y cuyas coordenadas son números primos entre sí. Demostrar que

$$T = \frac{4\pi}{3\zeta(3)} r^3 + O(r^2).$$

23, a. Demostrar el teorema **c, § 3**, contando los divisores del número a que no son divisibles por el cuadrado de un entero superior a 1 y que tienen 1, 2, . . . divisores primos.

b. Supongamos que a es entero, $a > 1$, d recorre los divisores del número a que tienen no más de m divisores primos. Demostrar que para m par, $\sum \mu(d) \geqslant 0$, y para m impar, $\sum \mu(d) \leqslant \leqslant 0$.

c. En las condiciones del teorema **d**, **§ 3**, considerando que todos los valores f son no negativos y haciendo recorrer a d solamente los números que tienen no más de m divisores primos, demostrar que

$$S' \leqslant \sum \mu(d) S_d, \quad S' \geqslant \sum \mu(d) S_d$$

según que m sea par o impar.

d. En las condiciones de la pregunta **17, a**, demostrar unas desigualdades iguales a las de la pregunta **c**, considerando que todos los valores de $f(x)$ son no negativos; hacer lo mismo también en las condiciones **17, b**, considerando que todos los valores $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ son no negativos.

24. Supongamos que ε es cualquier constante con las condiciones $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$, $N \geqslant 8$, $r = \ln N$, $0 < q \leqslant N^{1-\varepsilon}$, $0 \leqslant l < < q$, $(q, l) = 1$, $\pi(N, q, l)$ es la cantidad de números primos con las condiciones: $p \leqslant N$, $p = qt + l$, donde t es entero. Demostrar que

$$\pi(N, q, l) = O(\Delta); \quad \Delta = \frac{Nr^{\varepsilon}}{r\varphi(q)}.$$

Para la demostración, haciendo $h = r^{1-0,5\varepsilon}$, los números primos con las condiciones indicadas se deben considerar como un caso particular de todos los números con estas condiciones que son primos con a, donde a es el producto de todos los primos que no son superiores a e^h y que no dividen a q. Se debe aplicar el teorema de la pregunta **23, d** (condiciones de la pregunta **17, a**) con el a indicado y $m = = 2[2 \ln r + 1]$.

25. Supongamos que k es par, $k > 0$, la descomposición canónica del número a tiene la forma $a = p_1 p_2 \ldots p_k$ y d recorre los divisores del número a con la condición

$0 < d < \sqrt{a}$. Demostrar que

$$\sum_{d} \mu(d) = 0.$$

26. Supongamos que k es entero, $k > 0$, d recorre los números con la condición $\varphi(d) = k$. Demostrar que

$$\sum_{d} \mu(d) = 0.$$

27. Utilizando la expresión de $\varphi(a)$, demostrar que la cantidad de números primos es infinita.

28, a. Demostrar el teorema **d**, § **4**, estableciendo que la cantidad de números de la sucesión 1, 2, . . ., a que tienen con a un mismo máximo común divisor δ, es igual a $\varphi\left(\frac{a}{\delta}\right)$.

b. Deducir la expresión para $\varphi(a)$:

α) aplicando el teorema de la pregunta **10**, **b**;

β) aplicando el teorema de la pregunta **17**, **c**.

29. Sea $R(s) > 2$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

30. Sea n entero, $n \geqslant 2$. Demostrar que

$$\sum_{m=1}^{n} \varphi(m) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n \ln n).$$

Ejercicios numéricos referentes al capítulo II

1, a. Hallar el exponente con el que el número 5 figura en la descomposición canónica de 5 258! (véase la pregunta 5).

b. Hallar la descomposición canónica del número 125!

2, a. Hallar τ (5 600) y S (5 600).

b. Hallar τ (116 424) y S (116 424).

3. Formar la tabla de los valores de la función $\mu(a)$ para todos los $a = 1, 2, \ldots, 100$.

4. Hallar α) φ (5 040), β) φ (1 294 700).

5. Formar la tabla de los valores de la función $\varphi(a)$ para todos los $a = 1, 2, \ldots, 50$, aplicando solamente la fórmula (5), § **4** y el teorema **c**, § **4**.

CAPITULO TERCERO

Congruencias

§ 1. Conceptos fundamentales

a. Vamos a estudiar los números enteros en relación con los restos de la división de los mismos por un entero positivo m dado, al cual lo llamaremos *módulo*.

A cada número entero le corresponde el resto de su división por m (c, § 1, cap. I); si a dos enteros a y b les corresponde un mismo resto r, éstos se llaman *congruentes según el módulo m, o respecto del módulo m,* o simplemente, *congruentes módulo m.*

b. La congruencia de los números a y b respecto del módulo m se escribe así:

$$a \equiv b \text{ (mód. } m).$$

lo cual se lee: a es congruente con b respecto del módulo m.

c. *La congruencia de los números a y b respecto del módulo m es equivalente a:*

1. *La posibilidad de expresar a en la forma $a = b + mt$, donde t es entero.*

2. *La divisibilidad de $a - b$ por m.*

En efecto, de $a \equiv b$ (mód. m) se deduce que

$$a = mq + r, \quad b = mq_1 + r; \quad 0 \leqslant r < m,$$

de donde

$$a - b = m(q - q_1),\ a = b + mt,\quad t = q - q_1.$$

Recíprocamente, de $a = b + mt$, representando b en la forma

$$b = mq_1 + r,\quad 0 \leqslant r < m,$$

deducimos que

$$a = mq + r;\quad q = q_1 + t,$$

es decir,

$$a \equiv b \ (\text{mód. } m).$$

Por esto, la afirmación **1** es justa.

De **1** se deduce inmediatamente la afirmación **2**.

§ 2. Propiedades de las congruencias, semejantes a las propiedades de las igualdades

a. *Dos números que son congruentes con un tercero, son congruentes entre sí.*

Se deduce de **a**, § **1**.

b. *Las congruencias se pueden sumar término a término.*

En efecto, sea

$$a_1 \equiv b_1 \ (\text{mód. } m),\quad a_2 \equiv b_2 \ (\text{mód. } m),\ \ldots,\ a_k \equiv b_k \ (\text{mód. } m). \quad (1)$$

Entonces, (**1**, **c**, § **1**),

$$a_1 = b_1 + mt_1,\ a_2 = b_2 + mt_2,\ \ldots,\ a_k = b_k + mt_k, \quad (2)$$

de donde

$$a_1 + a_2 + \ldots a_k = \\ = b_1 + b_2 + \ldots + b_k + m(t_1 + t_2 + \ldots + t_k),$$

o sea, (**1**, **c**, § **1**),

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_k \ (\text{mód. } m).$$

Un sumando que figure en un miembro cualquiera de la congruencia se puede pasar al otro miembro, cambiándole el signo.

En efecto, sumando la congruencia $a + b \equiv c$ (mód. m) con la congruencia evidente $-b \equiv -b$ (mód. m), resulta $a \equiv c - b$ (mód. m).

A cada miembro de una congruencia se le puede sumar (o restar) cualquier número que sea múltiplo del módulo.

En efecto, sumando la congruencia $a \equiv b$ (mód. m) con la congruencia evidente $mk \equiv 0$ (mód. m), resulta $a + mk \equiv$ $\equiv b$ (mód. m).

c. *Las congruencias se pueden multiplicar término a término.*

En efecto, examinemos de nuevo las congruencias (1) y las igualdades (2) que se deducen de ellas. Multiplicando término a término las igualdades (2), obtenemos

$$a_1a_2 \ldots a_k = b_1b_2 \ldots b_k + mN,$$

donde N es entero. Por consiguiente, (**1**, **c**, **§ 1**),

$$a_1a_2 \ldots a_k \equiv b_1b_2 \ldots b_k \text{ (mód. } m).$$

Ambos miembros de la congruencia se pueden elevar a una misma potencia.

Esto se deduce del aserto anterior.

Ambos miembros de la congruencia se pueden multiplicar por un mismo entero.

En efecto, multiplicando la congruencia $a \equiv b$ (mód. m) por la congruencia evidente $k \equiv k$ (mód. m), obtenemos $ak \equiv bk$ (mód. m).

d. Las propiedades **b** y **c** (la adición y multiplicación de congruencias) se generalizan mediante el siguiente teorema.

Si en la expresión de una función racional entera de coeficientes enteros

$$S = \sum A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}$$

se sustituyen los números $A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$, $x_1, \ldots, x_k$ por los números $B_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$, $y_1, \ldots, y_k$, los cuales son congruentes con los anteriores respecto del módulo m, la expresión nueva de S será congruente con la precedente respecto del módulo m.

En efecto, de

$$A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} \equiv B_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} \pmod{m}.$$

$$x_1 \equiv y_1 \pmod{m}, \ \ldots, \ x_k \equiv y_k \pmod{m}$$

hallamos (c)

$$x_1^{\alpha_1} \equiv y_1^{\alpha_1} \pmod{m}, \ \ldots, \ x_k^{\alpha_k} \equiv y_k^{\alpha_k} \pmod{m},$$

$$A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k} \equiv B_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} y_1^{\alpha_1} \ldots y_k^{\alpha_k} \pmod{m}.$$

de donde, sumando, obtenemos

$$\sum A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k} \equiv \sum B_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} y_1^{\alpha_1} \ldots y_k^{\alpha_k} \pmod{m}.$$

Si

$$a \equiv b \pmod{m}, \quad a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, \ \ldots \ a_n \equiv b_n \pmod{m},$$

$$x \equiv x_1 \pmod{m},$$

se tiene

$$ax^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv$$

$$\equiv bx_1^n + b_1x_1^{n-1} + \ldots + b_n \pmod{m}.$$

Este aserto es un caso particular del anterior.

e. *Ambos miembros de la congruencia se pueden dividir por su común divisor, si este último es primo con el módulo.*

En efecto, si $a \equiv b \pmod{m}$, $a = a_1d$, $b = b_1d$, $(d, m) = 1$ resulta que la diferencia $a - b$, igual a $(a_1 - b_1)\,d$, es divisible por m. Por esto (2, f, § 2, cap. I) $a_1 - b_1$ es divisible por m, es decir, $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$.

§ 3. Otras propiedades de las congruencias

a. *Ambos miembros de una congruencia y el módulo se pueden multiplicar por un mismo número entero.*

En efecto, de $a \equiv b \pmod{m}$ se deduce que

$$a = b + mt, \quad ak = bk + mkt$$

y, por consiguiente, $ak \equiv bk \pmod{mk}$.

b. *Ambos miembros de una congruencia y el módulo se pueden dividir por cualquier común divisor suyo.*

En efecto, sea

$$a \equiv b \pmod{m}, \quad a = a_1d, \quad b = b_1d, \quad m = m_1d.$$

Se tiene

$$a = b + mt, \; a_1d = b_1d + m_1dt, \; a_1 = b_1 + m_1t$$

y, por lo tanto, $a_1 \equiv b_1$ (mód. m_1).

c. *Si se verifica la congruencia $a \equiv b$ respecto de varios módulos, entonces se verifica también respecto del módulo que es igual al mínimo común múltiplo de estos módulos.*

En efecto, de $a \equiv b$ (mód. m_1), $a \equiv b$ (mód. m_2), . . ., $a \equiv b$ (mód. m_k) se deduce que la diferencia $a - b$ es divisible por todos los módulos $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Por esto, (**c**, **§ 3**, cap. **I**), también es divisible esta diferencia por el mínimo común múltiplo m de estos módulos, es decir, $a \equiv b$ (mód. m).

d. *Si una congruencia se verifica respecto de un módulo m, también se verifica respecto de un módulo d que sea igual a cualquier divisor del número m.*

En efecto, de $a \equiv b$ (mód. m) se deduce que la diferencia $a - b$ tiene que ser divisible por m; por esto, (**1**, **b**, **§ 1**, cap. **I**), esta diferencia tiene que ser divisible también por cualquier divisor d del número m, es decir, $a \equiv b$ (mód. d).

e. *Si un miembro de una congruencia y el módulo son divisibles por algún número, el otro miembro de la congruencia tiene que ser divisible por el mismo número.*

En efecto, de $a \equiv b$ (mód. m) se deduce que $a = b + mt$; si a y m son múltiplos de d, entonces (**2**, **b**, **§ 1**, cap. **I**) también b tiene que ser múltiplo de d, como se afirmaba.

f. *Si* $a \equiv b$ (mód. m), *entonces* $(a, m) = (b, m)$.

En efecto, en virtud de **2**, **b**, **§ 2**, cap. **I**, esta igualdad se deduce inmediatamente de $a = b + mt$.

§ 4. Sistema completo de restos

a. Los números que dan un mismo resto, o lo que es lo mismo, los que son congruentes respecto del módulo m, forman una *clase de números respecto del módulo m*.

De esta definición se deduce que a todos los números de una clase les corresponde un mismo resto r, por lo cual,

haciendo recorrer a q en la forma $mq + r$ todos los números enteros, se obtienen todos los números de la clase. Correspondientemente a m valores distintos de r, se tienen m clases de números respecto del módulo m.

b. Cualquier número de la clase se llama *resto* o *residuo respecto del módulo m* con relación a todos los números de la misma clase. El resto que se obtiene para $q = 0$, igual al residuo mismo r, se llama *resto no negativo mínimo.*

El resto ρ que es el menor en valor absoluto, se llama *resto absoluto mínimo.*

Evidentemente, si $r < \frac{m}{2}$ se tiene $\rho = r$; si $r > \frac{m}{2}$ se tiene $\rho = r - m$; finalmente, si m es par y $r = \frac{m}{2}$, se puede tomar por ρ cualquiera de los dos números $\frac{m}{2}$ y $\frac{m}{2} - m = -\frac{m}{2}$.

Tomando un resto de cada clase se obtiene un *sistema completo de restos respecto del módulo m.* Por lo general, como sistema completo de restos se emplean los restos no negativos mínimos $0, 1, \ldots, m-1$ o también los restos absolutos mínimos; como se deduce de lo expuesto anteriormente, estos últimos, en caso de m impar, se representan por la sucesión

$$-\frac{m-1}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m-1}{2},$$

y en el caso de m par, por una cualquiera de las dos sucesiones

$$-\frac{m}{2}+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m}{2},$$

$$-\frac{m}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m}{2}-1.$$

c. *Cualesquiera m números que sean incongruentes dos a dos respecto del módulo m, forman un sistema completo de restos de este módulo.*

En efecto, estos números, siendo incongruentes, tienen que pertenecer a distintas clases, y como en total hay m números,

es decir, tantos cuantas clases hay, en cada una de las clases tiene que haber, indudablemente, un número único.

d. *Si* $(a, m) = 1$ *y x recorre el sistema completo de restos respecto del módulo m, entonces* $ax + b$, *donde b es un entero cualquiera, también recorre el sistema completo de restos respecto del módulo m.*

En efecto, hay tantos números de la forma $ax + b$ cuantos números x hay, es decir, m. Según **c**, no queda más que mostrar que dos números cualesquiera $ax_1 + b$ y $ax_2 b$, que corresponden a dos números incongruentes x_1 y x_2, son también incongruentes entre sí respecto del módulo m.

Pero suponiendo que $ax_1 + b \equiv ax_2 + b$ (mód. m), se obtiene la congruencia $ax_1 \equiv ax_2$ (mód. m), de donde, en virtud de que $(a, m) = 1$, resulta $x_1 \equiv x_2$ (mód. m), lo cual contradice a la incongruencia de los números x_1 y x_2.

§ 5. Sistema reducido de restos

a. En virtud de **f**, § **3**, los números de una misma clase respecto del módulo m tienen con el módulo un mismo máximo común divisor. Son de suma importancia las clases para las cuales este divisor es igual a la unidad, es decir, las clases que contienen números que son primos con el módulo.

Tomando sendos restos en estas clases, se obtiene el *sistema reducido de restos respecto del módulo m.* Por consiguiente, el sistema reducido de restos se puede formar de los números del sistema completo que son primos con el módulo. Ordinariamente, el sistema reducido de restos se extrae del sistema de restos no negativos mínimos: $0, 1, \ldots, m - 1$. Como entre éstos hay $\varphi(m)$ números que son primos con m, la cantidad de números del sistema reducido, así como la cantidad de clases que contienen números primos con el módulo, es igual a $\varphi(m)$.

Ejemplo. El sistema reducido de restos según el módulo 42 es

$$1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41.$$

b. *Cualesquiera $\varphi(m)$ números que sean incongruentes dos a dos respecto del módulo m y que sean primos con el módulo, forman un sistema reducido de restos según el módulo m.*

En efecto, estos números, siendo incongruentes dos a dos y primos con el módulo, tienen que pertenecer a distintas clases que contienen números que son primos con el módulo, y como en total hay $\varphi(m)$ de tales números, es decir, tantos cuantas clases hay del tipo indicado, en cada una de las clases habrá, indispensablemente, un número único.

c. *Si $(a, m) = 1$ y x recorre el sistema reducido de restos según el módulo m, ax también recorre el sistema reducido de restos según el módulo m.*

En efecto, hay tantos números ax cuantos números x hay, es decir, $\varphi(m)$. Por lo tanto, en virtud de **b**, no queda más que demostrar que los números ax son incongruentes dos a dos respecto del módulo m y son primos con el módulo. Pero lo primero se demostró en **d**, **§ 4** para los números de la forma más general $ax + b$; lo segundo se deduce de que $(a, m) = 1$, $(x, m) = 1$.

§ 6. Teoremas de Euler y Fermat

a. *Si $m > 1$ y $(a, m) = 1$ se tiene (teorema de Euler):*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

En efecto, si x recorre el sistema reducido de restos

$$x = r_1, r_2, \ldots, r_c; \quad c = \varphi(m),$$

formado por los restos no negativos mínimos, entonces los restos no negativos mínimos $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_c$ de los números ax también recorren el mismo sistema, pero, generalmente, dispuestos en otro orden (**c**, **§ 5**).

Multiplicando término a término las congruencias

$$ar_1 \equiv \rho_1 \pmod{m},\ ar_2 \equiv \rho_2 \pmod{m},\ \ldots,$$
$$\ldots,\ ar_c \equiv \rho_c \pmod{m},$$

obtenemos

$$a^c r_1 r_2 \ldots r_c \equiv \rho_1\rho_2 \ldots \rho_c \pmod{m},$$

de donde, dividiendo ambos miembros por el producto $r_1 r_2 \ldots r_c = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_c$, resulta

$$a^c \equiv 1 \pmod{m}.$$

b. *Si p es primo y a no es divisible por p, se tiene (teorema de Fermat)*:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \qquad (1)$$

Este teorema es una consecuencia del teorema **a** para $m = p$. Al último teorema se le puede dar una forma más cómoda. Precisando, si se multiplican ambos miembros de la congruencia (1) por a, se obtiene la congruencia

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

la cual es válida ya para todos los valores enteros de a, puesto que también es válida si a es múltiplo de p.

Preguntas referentes al capítulo III

1, a. Expresando los números enteros en el sistema decimal de numeración, deducir los criterios de divisibilidad por 3, 9, 11.

b. Expresando los números enteros en el sistema de numeración de base 100, deducir el criterio de divisibilidad por 101.

c. Expresando los números enteros en el sistema de numeración de base 1 000, deducir los criterios de divisibilidad por 37, 7, 11, 13.

2. Supongamos que $m > 0$, $(a, m) = 1$, b es entero, x recorre el sistema completo y ξ el sistema reducido de restos respecto del módulo m. Demostrar que

α) $\sum_x \left\{\frac{ax+b}{m}\right\} = \frac{1}{2}(m-1)$,

β) $\sum_\xi \left\{\frac{a\xi}{m}\right\} = \frac{1}{2}\varphi(m)$.

3, a. Supongamos que $m>0\,(a, m)=1,\ h\geqslant 0,\ c$ es real

$$S=\sum_{x=0}^{m-1}\left\{\frac{ax+\psi(x)}{m}\right\},$$

donde $\psi(x)$ para los valores considerados de x toma valores que cumplen la condición $c\leqslant\psi(x)\leqslant c+h$. Demostrar que

$$\left|S-\frac{1}{2}m\right|\leqslant h+\frac{1}{2}.$$

b. Supongamos que M es entero, $m>0$, $(a, m)=1$, A y B son reales,

$$A=\frac{a}{m}+\frac{\lambda}{m^2};\quad S=\sum_{x=M}^{M+m-1}\{Ax+B\}.$$

Demostrar que

$$\left|S-\frac{1}{2}m\right|\leqslant|\lambda|+\frac{1}{2}.$$

c. Sea M entero, $m>0$, $(a, m)=1$,

$$S=\sum_{x=M}^{M+m-1}\{f(x)\},$$

donde la función $f(x)$ admite derivadas continuas $f'(x)$ y $f''(x)$ en el intervalo $M\leqslant x\leqslant M+m-1$, y se cumplen las condiciones

$$f'(M)=\frac{a}{m}+\frac{\theta}{m^2};\quad (a, m)=1;\quad |\theta|<1,\quad \frac{1}{A}\leqslant|f''(x)|\leqslant\frac{k}{A},$$

siendo

$$1\leqslant m\leqslant\tau,\quad \tau=A^{\frac{1}{3}},\quad A\geqslant 2,\quad k\geqslant 1,$$

Demostrar que

$$\left|S-\frac{1}{2}m\right|<\frac{k+3}{2}.$$

4. Supongamos que en el desarrollo del número irracional A en fracción continua todos los cocientes incompletos están acotados, M es entero, m es entero, $m>0$, B es real.

Demostrar que

$$\sum_{x=M}^{M+m-1} \{Ax+B\} = \frac{1}{2}m + O(\ln m).$$

5, a. Supongamos que $A > 2$, $k \geqslant 1$ y que la función $f(x)$ admite derivada segunda continua en el intervalo $Q \leqslant x \leqslant$ $\leqslant R$, la cual satisface a las condiciones

$$\frac{1}{A} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{k}{A}.$$

Demostrar que

$$\sum_{Q \leqslant x \leqslant R} \{f(x)\} = \frac{1}{2}(R-Q) + \theta\Delta; \qquad |\theta| < 1,$$

$$\Delta = (2k^2(R-Q)\ln A + 8kA)\, A^{-\frac{1}{3}}.$$

b. Supongamos que $0 < \sigma \leqslant 1$, Q y R son enteros. En las condiciones de la pregunta **a**, demostrar que el número $\psi(\sigma)$ de fracciones $\{f(x)\}$; $x = Q+1, \ldots, R$ con la condición $0 \leqslant f(x) < \sigma$ se expresa por la fórmula

$$\psi(\sigma) = \sigma(R-Q) + \theta' \cdot 2\Delta; \; |\theta'| < 1.$$

6, a. Sea T la cantidad de puntos enteros (x, y) que hay en la región $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ $(r \geqslant 2)$. Demostrar que

$$T = \pi r^2 + O(r^{\frac{2}{3}} \ln r).$$

b. Supongamos que n es entero, $n > 2$, E es la constante de Euler. Demostrar que

$$\tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n) = n(\ln n + 2E - 1) + O(n^{\frac{1}{3}}(\ln n)^2).$$

7. A un sistema de n números enteros positivos, en que cada número viene expresado en el sistema de numeración de base 2, lo llamaremos regular, si para cualquier entero no negativo s la cantidad de números, en cuya expresión figura 2^s, es par, e irregular, si al menos para un s este número es impar.

Demostrar que un sistema irregular se puede hacer regular disminuyendo o excluyendo completamente un solo término del mismo, y en sistema regular se hace irregular disminuyendo o excluyendo completamente cualquiera de sus términos.

8, a. Demostrar que la forma

$$3^n x_n + 3^{n-1}x_{n-1} + \ldots + 3x_1 + x_0,$$

donde $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0$ recorren independientemente uno de otro los valores -1, 0, 1, representa todos los números

$$-H, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, H; \quad H = \frac{3^{n+1}-1}{3-1}.$$

y, además, cada número, de un modo único.

b. Sean $m_1, m_2, \ldots, m_k$ positivos, primos dos a dos. Aplicando **c**, § **4**, demostrar que se obtiene el sistema completo de restos respecto del módulo $m_1m_2, \ldots, m_k$, haciendo recorrer a los números $x_1, x_2, \ldots, x_k$ en la forma

$$x_1 + m_1x_2 + m_1m_2x_3 + \ldots + m_1m_2 \ldots m_{k-1}x_k$$

los sistemas completos de restos respecto de los módulos $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

9. Sean $m_1, m_2, \ldots, m_k$ primos dos a dos y sea

$$m_1m_2 \ldots m_k = M_1m_1 = M_2m_2 = \ldots = M_km_k.$$

a. Aplicando **c**, § **4**, demostrar que se obtiene el sistema completo de restos respecto del módulo $m_1m_2 \ldots m_k$, haciendo recorrer a los números $x_1, x_2, \ldots, x_k$ en la forma

$$M_1x_1 + M_2x_2 + \ldots + M_kx_k$$

los sistemas completos de restos respecto de los módulos $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

b. Aplicando **c**, § **4**, cap. **II** y **b**, § **5**, demostrar que se obtiene el sistema reducido de restos respecto del módulo $m_1m_2 \ldots$ $\ldots m_k$, haciendo recorrer a los números $x_1, x_2, \ldots, x_k$

en la forma

$$M_1x_1 + M_2x_2 + \ldots + M_kx_k$$

los sistemas reducidos de restos respecto de los módulos $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

c. Demostrar el teorema de la pregunta **b** independientemente del teorema **c**, § **4**, cap. **II** y deducir entonces el último teorema como consecuencia del primero.

d. Hallar de un modo elemental la expresión para $\varphi(p^\alpha)$ y, aplicando la igualdad **c**, § **4**, cap. **II**, deducir la expresión conocida para $\varphi(a)$.

10. Sean $m_1, m_2, \ldots, m_k$ primos dos a dos, superiores a 1, $m = m_1m_2 \ldots m_k$; $m = M_sm_s$.

a. Supongamos que $x_1, x_2, \ldots, x_k, x$ recorren los sistemas completos de restos, y $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \xi$ los sistemas reducidos de restos respecto de los módulos $m_1, m_2, \ldots, m_k, m$. Demostrar que las fracciones

$$\left\{\frac{x_1}{m_1} + \frac{x_2}{m_2} + \ldots + \frac{x_k}{m_k}\right\}$$

coinciden con las fracciones $\left\{\frac{x}{m}\right\}$, y las fracciones

$$\left\{\frac{\xi_1}{m_1} + \frac{\xi_2}{m_2} + \ldots + \frac{\xi_k}{m_k}\right\} \text{ con las fracciones } \left\{\frac{\xi}{m}\right\}.$$

b. Sean dadas k funciones racionales enteras de coeficientes enteros de r variables $x, \ldots, w\,(r \geqslant 1)$:

$$f_s(x, \ldots, w) = \sum_{\alpha, \ldots, \delta} c^{(s)}_{\alpha, \ldots, \delta}\, x^\alpha \ldots w^\delta; \quad s = 1, \ldots, k,$$

y sea

$$f(x, \ldots, w) = \sum_{\alpha, \ldots, \delta} c_{\alpha, \ldots, \delta}\, x^\alpha \ldots w^\delta;$$

$$c_{\alpha, \ldots, \delta} = \sum_{s=1}^{k} M_s c^{(s)}_{\alpha, \ldots, \delta};$$

$x_s, \ldots, w_s$ recorren los sistemas completos de restos y $\xi_s, \ldots, \omega_s$ los sistemas reducidos de restos respecto del

módulo m_s; $x, \ldots, w$ recorren los sistemas completos de restos y $\xi, \ldots, \omega$ los sistemas reducidos de restos respecto del módulo m. Demostrar que las fracciones

$$\left\{\frac{f_1(x_1, \ldots, w_1)}{m_1} + \ldots + \frac{f_k(x_k, \ldots, w_k)}{m_k}\right\}$$

coinciden con las fracciones $\left\{\frac{f(x, \ldots, w)}{m}\right\}$ y las fracciones

$$\left\{\frac{f_1(\xi_1, \ldots, \omega_1)}{m_1} + \ldots + \frac{f_k(\xi_k, \ldots, \omega_k)}{m_k}\right\}$$

con las fracciones $\left\{\frac{f(\xi, \ldots, \omega)}{m}\right\}$ (generalización de los teoremas de la pregunta **a**).

11, a. Supongamos que m es entero, $m > 0$, a es entero, x recorre el sistema completo de restos respecto del módulo m. Demostrar que

$$\sum e^{2\pi i \frac{ax}{m}} = \begin{cases} m, \text{ si } a \text{ es múltiplo de } m. \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

b. Supongamos que α es real, M es entero, P es entero, $P > 0$. Designando con la notación (α) el valor absoluto de la diferencia entre α y el número entero más próximo a α (distancia de α al entero más próximo) demostrar que

$$\left|\sum_{x=M}^{M+P-1} e^{2\pi i \alpha x}\right| \leqslant \min\left(P, \frac{1}{h(\alpha)}\right); \quad h \geqslant \begin{cases} 2 \text{ siempre} \\ 3, \text{ si } (\alpha) \leqslant \frac{1}{6}. \end{cases}$$

c. Supongamos que m es entero, $m > 1$ y que las funciones $M(a)$ y $P(a)$ para los valores $a = 1, 2, \ldots, m-1$ toman valores enteros con la condición $P(a) > 0$. Demostrar que

$$\sum_{a=1}^{m-1}\left|\sum_{x=M(a)}^{M(a)+P(a)-1} e^{2\pi i \frac{a}{m} x}\right| < \begin{cases} m \ln m - \frac{m}{3} \ln\left(2\left[\frac{m}{6}\right]+1\right), \\ m \ln m - \frac{m}{2}, \text{ si } m \geqslant 12, \\ m \ln m - m, \quad \text{si } m \geqslant 60. \end{cases}$$

12, a. Supongamos que m es entero, $m > 0$, ξ recorre el sistema reducido de restos respecto del módulo m. Demostrar que

$$\mu(m) = \sum_{\xi} e^{2\pi i \frac{\xi}{m}}.$$

b. Aplicando el teorema de la pregunta **a**, demostrar el primero de los teoremas **c**, § **3**, cap. **II** (véase la resolución de la pregunta **28**, **a**, cap. **II**).

c. Deducir el teorema de la pregunta **a**, aplicando el teorema de la pregunta **17**, **a**, cap. **II**.

d. Supongamos que

$$f(x, \ldots, w) = \sum_{\alpha, \ldots, \delta} c_{\alpha, \ldots,} x^{\alpha} \ldots w^{\delta}$$

es una función racional entera de coeficientes enteros de r variables $x, \ldots, w$ $(r \geqslant 1)$, a es entero, m es entero, $m > 0$; $x, \ldots, w$ recorren el sistema completo de restos y $\xi, \ldots, \omega$ el sistema reducido de restos respecto del módulo m. Introducimos las notaciones

$$S_{a, m} = \sum_{x} \ldots \sum_{w} e^{2\pi i \frac{af(x, \ldots, w)}{m}},$$

$$S'_{a, m} = \sum_{\xi} \ldots \sum_{\omega} e^{2\pi i \frac{af(\xi, \ldots, \omega)}{m}}.$$

Supongamos también que $m = m_1 \ldots m_k$, donde $m_1, \ldots, m_k$ son primos dos a dos, superiores a 1, y sea $m = M_s m_s$. Demostrar que

$$S_{a_1, m_1} \ldots S_{a_k, m_k} = S_{M_1 a_1 + \ldots + M_k a_k, m},$$

$$S'_{a_1, m_1} \ldots S'_{a_k, m_k} = S'_{M_1 a_1 + \ldots + M_k a_k, m}.$$

e. Con las notaciones de la pregunta **d**, hacemos

$$A(m) = m^{-r} \sum_{a} S_{a, m}, \quad A'(m) = m^{-r} \sum_{a} S'_{a, m},$$

donde a recorre el sistema reducido de restos respecto del módulo m.

Demostrar que

$$A(m_1)\ldots A(m_k)=A(m),$$
$$A'(m_1)\ldots A'(m_k)=A'(m).$$

13, a. Demostrar que

$$\varphi(a)=\sum_{n=0}^{a-1}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\sum_{x=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{nx}{p}}\right),$$

donde p recorre los divisores primos del número a.

b. Deducir la expresión conocida para $\varphi(a)$ de la identidad de la pregunta **a.**

14. Demostrar que

$$\tau(a)=2\sum_{0<x<\sqrt{a}}\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{x-1}e^{2\pi i\frac{ak}{x}}+\delta,$$

donde $\delta=1$ ó $\delta=0$, según que a sea el cuadrado de un número entero o no lo sea.

15, a. Supongamos que p es primo y $h_1, h_2, \ldots, h_a$ son enteros. Demostrar que

$$(h_1+h_2+\ldots+h_a)^p\equiv$$
$$\equiv h_1^p+h_2^p+\ldots+h_a^p \pmod{p}.$$

b. Deducir el teorema de Fermat del teorema de la pregunta **a.**

c. Deducir el teorema de Euler del teorema de Fermat.

Ejercicios numéricos referentes al capítulo III

1, a. Hallar el resto de la división de

$$(12\,371^{56}+34)^{28} \text{ por } 111.$$

b. ¿Es divisible el número $2^{1\,093}-2$ por $1\,093^2$?

2, a. Aplicando los criterios de divisibilidad de la pregunta **1**, hallar el desarrollo canónico del número 244 943 325.

b. Hallar el desarrollo canónico del número 282 321 246 671 737.

CAPITULO CUARTO

Congruencias con una incógnita

§ 1. *Conceptos fundamentales* Nuestro objetivo próximo es el estudio de las congruencias de la siguiente forma general:

$f(x) \equiv 0$ (mód. m); $f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ (1)

Si a no es divisble por m, el número n se llama *grado de la congruencia.*

Resolver la congruencia, significa hallar todos los valores de x que la satisfacen. Dos congruencias, a las que satisfacen unos mismos valores de x, se llaman *equivalentes.*

Si a la congruencia (1) la satisface algún $x = x_1$, entonces (**d**, **§ 2**, cap. **III**) a la misma congruencia la satisfacen también todos los números que son congruentes con x_1 respecto del módulo m: $x \equiv x_1$ (mód. m). Toda esta clase de números se considera como *una solución*. Por lo tanto, la *congruencia* (1) *tendrá tantas soluciones cuantos restos del sistema completo la satisfagan*.

Ejemplo. A la congruencia

$$x^5 + x + 1 \equiv 0 \text{ (mód. 7)},$$

entre los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 del sistema completo de restos respecto del módulo 7, la satisfacen dos números: $x = 2$ y $x = 4$. Por ello, la congruencia indicada tiene dos soluciones:

$$x \equiv 2 \text{ (mód. 7)}, \quad x \equiv 4 \text{ (mód. 7)}.$$

§ 2. Congruencias de primer grado

a. La congruencia de primer grado, después de trasladar el término independiente (con el signo contrario) al segundo miembro, se reduce a la forma

$$ax \equiv b \text{ (mód. } m). \qquad (1)$$

b. Comenzando a estudiar el problema del número de soluciones de la congruencia (1), nos limitaremos primero al caso $(a, m) = 1$. En virtud del § **1**, la congruencia considerada admite tantas soluciones cuantos restos del sistema completo la satisfacen. Mas, cuando x recorre el sistema completo de restos respecto del módulo m, ax recorre el sistema completo de restos (**d**, § **4**, cap. **III**). Por consiguiente, para un valor de x tomado del sistema completo, y sólo para uno, ax será congruente con b. Así, pues, si $(a, m) = 1$ la congruencia (1) admite una sola solución.

c. Supongamos ahora que $(a, m) = d > 1$. Entonces, para que la congruencia (1) tenga solución es necesario (**e**, § **3**, cap. **III**) que b sea divisible por d, pues en caso contrario la congruencia (1) sería imposible para algún x entero. Por esta razón, suponiendo que b es un múltiplo de d, hacemos $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $m = m_1 d$. Entonces la congruencia (1) (después de haber simplificado por d) resulta equivalente a $a_1 x \equiv b_1$ (mód. m_1), en la cual $(a_1, m_1) = 1$ y, por lo tanto admite una solución respecto del módulo m_1. Sea x_1 el resto no negativo mínimo de esta solución respecto del módulo m_1, entonces todos los números x que forman esta solución serán de la forma

$$x \equiv x_1 \text{ (mód. } m_1). \qquad (2)$$

Respecto del módulo m los números (2) forman más de una solución; forman precisamente tantas soluciones cuantos números (2) haya en la sucesión $0, 1, 2, \ldots, m - 1$ que sean restos no negativos mínimos respecto del módulo m. Tales números son:

$$x_1,\ x_1 + m_1,\ x_1 + 2m_1,\ \ldots,\ x_1 + (d - 1)\, m_1,$$

es decir, en total d numeros (2) y, por consiguiente, la congruencia (1) admite d soluciones.

d. Haciendo un resumen de todo lo demostrado, resulta el teorema siguiente:

Sea $(a, m) = d$. *La congruencia* $ax \equiv b$ (mód. m) *es imposible si* b *no es divisible por* d. *Si* b *es múltiplo de* d, *la congruencia admite* d *soluciones.*

e. Para averiguar las soluciones de la congruencia (1), indicaremos solamente un método, basado en la teoría de las fracciones continuas; además, es suficiente limitarse al caso $(a, m) = 1$.

Desarrollando en fracción continua la razón $m : a$,

$$\frac{m}{a} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}}$$

y considerando las dos fracciones reducidas últimas:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad \frac{P_n}{Q_n} = \frac{m}{a},$$

en virtud de las propiedades de las fracciones continuas (**e**, § **4**, cap. **I**), se tiene:

$$mQ_{n-1} - aP_{n-1} = (-1)^n,$$
$$aP_{n-1} \equiv (-1)^{n-1} \text{ (mód. } m),$$
$$a \cdot (-1)^{n-1} P_{n-1} b \equiv b \text{ (mód. } m).$$

Así, pues, la congruencia en cuestión admite la solución

$$x \equiv (-1)^{n-1} P_{n-1} b \text{ (mód. } m),$$

para cuya averiguación es suficiente calcular P_{n-1} según el método señalado en **d**, § **4**, cap. **I**.

Ejemplo. Resolvamos la congruencia

$$111x \equiv 75 \text{ (mód. } 321). \qquad (3)$$

Aquí $(111,321) = 3$, siendo 75 múltiplo de 3. Por esta razón, la congruencia admite tres soluciones.

Dividiendo ambos miembros de la congruencia y el módulo por 3, obtenemos la congruencia

$$37x \equiv 25 \text{ (mód. } 107), \qquad (4)$$

la cual debe resolverse primeramente. Se tiene

```
        107 | 37
         74 |----
     -------| 2
      37 | 33
      33 |----
   ------| 1
   33 | 4
   32 |----
  ----| 8
 4 | 1
 4 |----
---| 4
 »
```

q		2	1	8	4
P_s	1	2	3	26	107

Por lo tanto, en el caso dado $n = 4$, $P_{n-1} = 26$, $b = 25$, y obtenemos la solución de la congruencia (4) en la forma

$$x \equiv -26 \cdot 25 \equiv 99 \text{ (mód. } 107).$$

De aquí, las soluciones de la congruencia (3) se expresan así:

$$x \equiv 99; \quad 99 + 107; \quad 99 + 2 \cdot 107 \text{ (mód. } 321),$$

es decir,

$$x \equiv 99; \quad 206; \quad 313 \text{ (mód. } 321).$$

§ 3. Sistema de congruencias de primer grado

a. Estudiaremos solamente el sistema más simple de congruencias

$$x \equiv b_1 \text{ (mód. } m_1),$$
$$x \equiv b_2 \text{ (mód. } m_2), \; \ldots, \; x \equiv b_k \text{ (mód. } m_k) \qquad (1)$$

con una incógnita, pero con distintos módulos que son primos dos a dos.

b. Se puede resolver el sistema (1), es decir, se pueden hallar todos los valores de x que le satisfacen, aplicando el teorema siguiente:

Supongamos que los números M_s y M'_s vienen definidos por las condiciones

$$m_1 m_2 \ldots m_k = M_s m_s, \quad M_s M'_s \equiv 1 \pmod{m_s}$$

y sea

$$x_0 = M_1 M'_1 b_1 + M_2 M'_2 b_2 + \ldots + M_k M'_k b_k.$$

Entonces el conjunto de valores de x que satisfacen al sistema (1) *se determina por la congruencia*

$$x \equiv x_0 \pmod{m_1 m_2 \ldots m_k}. \qquad (2)$$

En efecto, como todos los números M_j, distintos de M_s, son divisibles por m_s, para cualquier $s = 1, 2, \ldots, k$ se tiene

$$x_0 \equiv M_s M'_s b_s \equiv b_s \pmod{m_s},$$

y, por consiguiente, el sistema (1) es equivalente al sistema

$$x \equiv x_0 \pmod{m_1}, \quad x \equiv x_0 \pmod{m_2}, \ldots$$
$$\ldots, x \equiv x_0 \pmod{m_k} \qquad (3)$$

(es decir, a los sistemas (1) y (3) les satisfacen unos mismos valores de x). Pero, en virtud de los teoremas **c**, § **3**, cap. **III** y **d**, § **3**, cap. **III**, al sistema (3) le satisfacen aquellos valores de x, y sólo aquellos, que satisfacen a la congruencia (2).

c. *Si $b_1, b_2, \ldots, b_k$ recorren independientemente uno de otro los sistemas completos de restos respecto de los módulos $m_1, m_2, \ldots, \ldots, m_k$, entonces x_0 recorre el sistema completo de restos respecto del módulo $m_1 m_2 \ldots m_k$.*

En efecto, x_0 recorre $m_1 m_2 \ldots m_k$ valores, los cuales, en virtud de **d**, § **3**, cap. **III**, son incongruentes respecto del módulo $m_1 m_2 \ldots m_k$.

d. Ejemplo. Resolvamos el sistema

$$x \equiv b_1 \pmod{4}, \quad x \equiv b_2 \pmod{5}, \quad x \equiv b_3 \pmod{7}.$$

Aquí $4 \cdot 5 \cdot 7 = 35 \cdot 4 = 28 \cdot 5 = 20 \cdot 7$, y además,

$$35 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{4}, \quad 28 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{5},$$
$$20 \cdot 6 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Por lo tanto

$x_0 = 35 \cdot 3b_1 + 28 \cdot 2b_2 + 20 \cdot 6b_3 = 105b_1 + 56b_2 + 120b_3$

y, por consiguiente, el conjunto de valores de x que satisfacen al sistema puede expresarse en la forma

$$x \equiv 105b_1 + 56b_2 + 120b_3 \text{ (mód. 140)}.$$

Por ejemplo, el conjunto de valores de x que satisfacen al sistema

$$x \equiv 1 \text{ (mód. 4)}, \quad x \equiv 3 \text{ (mód. 5)}, \quad x \equiv 2 \text{ (mód. 7)},$$

es

$$x \equiv 105 \cdot 1 + 56 \cdot 3 + 120 \cdot 2 \equiv 93 \text{ (mód. 140)},$$

y el conjunto de valores de x que satisfacen al sistema

$$x \equiv 3 \text{ (mód. 4)}, \quad x \equiv 2 \text{ (mód. 5)}, \quad x \equiv 6 \text{ (mód. 7)},$$

es

$$x = 105 \cdot 3 + 56 \cdot 2 + 120 \cdot 6 \equiv 27 \text{ (mód. 140)}.$$

§ 4. Congruencias de cualquier grado respecto de un módulo primo

a. Sea p un número primo. Demostremos unos teoremas generales relativos a una congruencia de la forma

$$f(x) \equiv 0 \text{ (mód. } p);$$
$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n. \quad (1)$$

b. *Una congruencia de la forma* (1) *es equivalente a una congruencia de grado no superior a* $p - 1$.

En efecto, dividiendo $f(x)$ por $x^p - x$, se tiene

$$f(x) = (x^p - x)\, Q(x) + R(x),$$

donde el grado de $R(x)$ no es superior a $p - 1$. Como $x^p - x \equiv 0$ (mód. p), resulta $f(x) \equiv R(x)$ (mód. p), de donde se deduce el teorema indicado.

c. *Si la congruencia* (1) *admite más de n soluciones, todos los coeficientes de* $f(x)$ *son múltiplos de* p.

En efecto, supongamos, que la congruencia (1) admite al menos $n + 1$ soluciones. Designando los restos de estas

soluciones con las letras $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, podemos expresar $f(x)$ en la forma

$$\begin{aligned} f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n)+ \\ +b(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})+ \\ +c(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})+ \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\ +k(x-x_1)(x-x_2)+ \\ +l(x-x_1)+ \\ +m. \end{aligned} \qquad (2)$$

Con este fin, transformando (abriendo paréntesis) los sumandos del segundo miembro en polinomios, elegimos b de tal modo que la suma de los coeficientes de x^{n-1} en los dos primeros polinomios coincida con a_1; una vez hallado b, elegimos c de tal modo que la suma de los coeficientes de x^{n-2} en los primeros tres polinomios coincida con a_2, etc. Haciendo en (2) $x = x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, sucesivamente, comprobamos que todos los números $m, l, k, \ldots, c, b, a$ son múltiplos de p. Por lo tanto, también son múltiplos de p todos los números $a, a_1, \ldots, a_n$ (como sumas de números que son múltiplos de p).

d. *Si p es un número primo, se verifica la congruencia (teorema de Wilson)*

$$1\cdot 2 \ldots (p-1)+1 \equiv 0 \text{ (mód. } p). \qquad (3)$$

En efecto, si $p = 2$ el teorema es evidente. Si $p > 2$ consideramos la congruencia

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1)) - (x^{p-1}-1) \equiv \equiv 0 \text{ (mód. } p),$$

ésta es de grado no superior a $p-2$ y admite $p-1$ soluciones; precisamente las soluciones cuyos restos son $1, 2, \ldots \ldots, p-1$. Por consiguiente, según el teorema **c** todos sus coeficientes son múltiplos de p; en particular, también es

divisible por p el término independiente, el cual es precisamente igual al primer miembro de la congruencia (3).

Ejemplo. Se tiene $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 721 \equiv 0 \pmod{7}$.

§ 5. Congruencias de cualquier grado respecto de un módulo compuesto

a. *Si $m_1, m_2, \ldots, m_k$ son primos dos a dos, la congruencia*

$$f(x) \equiv 0 \ (\text{mód. } m_1 m_2 \ldots m_k) \qquad (1)$$

es equivalente al sistema

$$f(x) \equiv 0 \ (\text{mód. } m_1),$$

$$f(x) \equiv 0 \ (\text{mód. } m_2), \ \ldots, \ f(x) \equiv 0 \ (\text{mód. } m_k).$$

Además, designando con $T_1, T_2, \ldots, T_k$ los números de soluciones de cada una de las congruencias de este sistema respecto de los módulos correspondientes y con T el número de soluciones de la congruencia (1), *se tiene*

$$T = T_1 T_2 \ldots T_k.$$

En efecto, la primera parte del teorema se deduce de **c** y **d**, § **3**, cap. **III**. La segunda parte se deduce de que cada una de las congruencias

$$f(x) \equiv 0 \ (\text{mód. } m_s) \qquad (2)$$

se cumple cuando, y sólo cuando, se cumple una de las T_s congruencias de la forma

$$x \equiv b_s \ (\text{mód. } m_s)$$

donde b_s recorre los restos de las soluciones de la congruencia (2); además, son posibles en total $T_1 T_2 \ldots T_k$ combinaciones distintas de la forma

$$x \equiv b_1 (\text{mód. } m_1), \quad x \equiv b_2 \ (\text{mód. } m_2), \ \ldots \ x \equiv b_k \ (\text{mód. } m_k),$$

que dan lugar (**c**, § **3**) a clases distintas respecto del módulo

$$m_1 m_2 \ldots m_k.$$

Ejemplo. La congruencia

$$f(x) \equiv 0 \ (\text{mód. } 35), \quad f(x) = x^4 + 2x^3 + 8x + 9 \qquad (3)$$

es equivalente al sistema

$$f(x) \equiv 0 \text{ (mód. 5)}, \quad f(x) \equiv 0 \text{ (mód. 7)}.$$

Fácilmente se comprueba (§ 1) que la primera congruencia de este sistema tiene 2 soluciones: $x \equiv 1;\ 4$ (mód. 5), la segunda congruencia tiene 3 soluciones: $x \equiv 3;\ 5;\ 6$ (mód. 7). Debido a esto, la congruencia (3) tiene $2 \cdot 3 = 6$ soluciones. Para hallar estas 6 soluciones, hay que resolver 6 sistemas de la forma

$$x \equiv b_1 \text{ (mód. 5)}, \quad x \equiv b_2 \text{ (mód. 7)}, \tag{4}$$

las cuales se obtienen haciendo recorrer a b_1 los valores $b_1 = 1;\ 4$, y a b_2 los valores $b_2 = 3;\ 5;\ 6$. Pero, como

$$35 = 7 \cdot 5 = 5 \cdot 7, \quad 7 \cdot 3 \equiv 1 \text{ (mód. 5)}, \quad 5 \cdot 3 \equiv 1 \text{ (mód. 7)},$$

el conjunto de valores de x que satisfacen al sistema (4) se expresa en la forma (**b**, § **3**)

$$x \equiv 21b_1 + 15b_2 \text{ (mód. 35)}.$$

Por lo tanto, las soluciones de la congruencia (3) son

$$x \equiv 31;\ 26;\ 6;\ 24;\ 19;\ 34 \text{ (mód. 35)}.$$

b. En virtud del teorema **a**, la discusión y solución de la congruencia

$$f(x) \equiv 0 \text{ (mód. } p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k})$$

se reduce a la discusión y solución de las congruencias de la forma

$$f(x) \equiv 0 \text{ (mód. } p^{\alpha}); \tag{5}$$

como ahora aclararemos, esta última congruencia se reduce en general a la congruencia

$$f(x) \equiv 0 \text{ (mód. } p). \tag{6}$$

En efecto, todo x que satisface a la congruencia (5) necesariamente tiene que satisfacer también a la congruencia (6) Sea

$$x \equiv x_1 \text{ (mód. } p)$$

alguna solución de la congruencia (6). Entonces $x = x_1 + pt_1$, donde t_1 es entero. Poniendo este valor de x en la congruencia

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^2}$$

y desarrollando el primer miembro según la fórmula de Taylor, hallamos $\left(\text{teniendo en cuenta que } \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_1) \text{ es entero y despreciando los términos que son múltiplos de } p^2\right)$:

$$f(x_1) + pt_1 f'(x_1) \equiv 0 \pmod{p^2}, \quad \frac{f(x_1)}{p} + t_1 f'(x_1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Limitándonos aquí al caso en que $f'(x_1)$ no es divisible por p, resulta una solución:

$$t_1 \equiv t_1' \pmod{p}; \; t_1 = t_1' + pt_2.$$

La expresion de x toma la forma

$$x = x_1 + pt_1' + p^2 t_2 = x_2 + p^2 t_2;$$

poniéndola en la congruencia

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^3},$$

resulta

$$f(x_2) + p^2 t_2 f'(x_2) \equiv 0 \pmod{p^3},$$

$$\frac{f(x_2)}{p^2} + t_2 f'(x_2) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Aquí $f'(x_2)$ no es divisible por p, puesto que

$$x_2 \equiv x_1 \pmod{p},$$

$$f'(x_2) \equiv f'(x_1) \pmod{p},$$

y, por lo tanto, la última congruencia tiene una sola solución:

$$t_2 \equiv t_2' \pmod{p};$$

$$t_2 \equiv t_2' + pt_3.$$

La expresión de x toma la forma

$$x = x_2 + p^2 t_2' + p^3 t_3 = x_3 + p^3 t_3;$$

etc. De este modo, partiendo de la solución dada de la congruencia (6) hallamos la solución congruente con ella de la

congruencia (5). En resumen, *toda solución* $x \equiv x_1$ (mód. p) *de la congruencia* (6), *con la condición de que* $f'(x_1)$ *no sea divisible por* p, *proporciona una solución de la congruencia* (5):

$$x = x_\alpha + p^\alpha t_\alpha;$$
$$x \equiv x_\alpha \ (\text{mód. } p^\alpha).$$

Ejemplo. Resolvamos la congruencia

$$\left.\begin{aligned} f(x) &\equiv 0 \ (\text{mód. } 27); \\ f(x) &= x^4 + 7x + 4. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

La congruencia $f(x) \equiv 0$ (mód. 3) tiene una solución $x \equiv \equiv 1$ (mód. 3); en este caso $f'(1) \equiv 2$ (mód. 3) y, por consiguiente, no es divisible por 3. Hallamos:

$$x = 1 + 3t_1,$$
$$f(1) + 3t_1 f'(1) \equiv 0 \ (\text{mód. } 9), \quad 3 + 3t_1 \cdot 2 \equiv 0 \ (\text{mód. } 9),$$
$$2t_1 + 1 \equiv 0 \ (\text{mód. } 3), \quad t_1 \equiv 1 \ (\text{mód. } 3), \quad t_1 = 1 + 3t_2,$$
$$x = 4 + 9t_2,$$
$$f(4) + 9t_2 f'(4) \equiv 0 \ (\text{mód. } 27), \quad 18 + 9t_2 \cdot 2 \equiv 0 \ (\text{mód. } 27),$$
$$2t_2 + 2 \equiv 0 \ (\text{mód. } 3), \quad t_2 \equiv 2 \ (\text{mód. } 3), \quad t_2 = 2 + 3t_3,$$
$$x = 22 + 27t_3.$$

Por lo tanto, la congruencia (7) tiene una solución

$$x \equiv 22 \ (\text{mód. } 27).$$

Preguntas referentes al capítulo IV

1, a. Supongamos que m es entero, $m > 0$, $f(x, \ldots, w)$ es una función racional entera de r variables $x, \ldots, w$ ($r \geqslant 1$) con coeficientes enteros. Si el sistema $x = x_0, \ldots, w = w_0$ satisface a la congruencia

$$f(x, \ldots, w) \equiv 0 \ (\text{mód. } m) \qquad (1)$$

entonces (generalización de la definición del § 1), el sistema de clase de números respecto del módulo m:

$$x \equiv x_0 \ (\text{mód. } m), \ldots, w \equiv w_0 \ (\text{mód. } m)$$

lo consideramos como una solución de la congruencia (1). Sea T el número de soluciones de la congruencia (1). Demostrar que

$$Tm = \sum_{a=0}^{m-1} \sum_{x=0}^{m-1} \cdots \sum_{w=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{af(x, \ldots, w)}{m}},$$

b. Con las notaciones de la pregunta **a** y de la pregunta **12, e,** cap. **III**, demostrar que

$$Tm = m^r \sum_{m_0 \setminus m} A(m_0).$$

c. Aplicar la igualdad de la pregunta **a** para demostrar el teorema del número de soluciones de una congruencia de primer grado.

d. Supongamos que m es entero, $m > 0$; $a, \ldots, f, g$ son enteros, en total $r + 1$ números ($r > 0$); $d = (a, \ldots, f, m)$; T es el número de soluciones de la congruencia

$$ax + \ldots + fw + g \equiv 0 \pmod{m}.$$

Aplicando la igualdad de la pregunta, **a**, demostrar que

$$T = \begin{cases} m^{r-1} d, & \text{si } g \text{ es múltiplo de } d, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

e. Demostrar el teorema de la pregunta **d** partiendo del teorema del número de soluciones de la congruencia $ax \equiv b \pmod{m}$.

2, a. Sea $m > 1$, $(a, m) = 1$. Demostrar que la congruencia $ax \equiv b \pmod{m}$ admite la solución $x \equiv ba^{\varphi(m)-1} \pmod{m}$.

b. Sea p un número primo, $0 < a < p$. Demostrar que la congruencia $ax \equiv b \pmod{p}$ admite la solución

$$x \equiv b(-1)^{a-1} \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-a+1)}{1 \cdot 2 \ldots a} \pmod{p}.$$

c. α) Indicar el método más simple posible de resolución de una congruencia de la forma

$$2^h x \equiv b \pmod{m};\ (2, m) = 1.$$

β) Indicar el método más simple posible de resolución de la congruencia

$$3^k x \equiv b \ (\text{mód. } m); \ (3, m) = 1.$$

γ) Sea $(a, m) = 1$, $1 < a < m$. Desarrollando los métodos indicados en las preguntas α) y β), demostrar que la búsqueda de la solución de la congruencia $ax \equiv b$ (mód. m) puede reducirse a la búsqueda de las soluciones de congruencias de la forma $b + mt \equiv 0$ (mód. p), donde p es un divisor primo del número a.

3. Sea m entero, $m > 1$, $1 \leqslant \tau < m$, $(a, m) = 1$. Empleando la teoría de congruencias, demostrar la existencia de enteros x e y con las condiciones

$$ax \equiv y \ (\text{mód. } m), \quad 0 < x \leqslant \tau, \quad 0 < |y| < \frac{m}{\tau}.$$

4, a. Siendo $(a, m) = 1$, consideramos la fracción simbólica $\frac{b}{a}$ respecto del módulo m, la cual denota cualquier resto de la solución de la congruencia $ax \equiv b$ (mód. m). Demostrar (las congruencias se toman respecto del módulo m) que:

α) Si $a \equiv a_1$, $b \equiv b_1$, se tiene $\frac{b}{a} \equiv \frac{b_1}{a_1}$.

β) El numerador b de la fracción simbólica $\frac{b}{a}$ se puede sustituir por un número congruente b_0, múltiplo de a. Entonces, la fracción simbólica $\frac{b}{a}$ es congruente con el número entero que se expresa por la fracción ordinaria $\frac{b_0}{a}$.

γ) $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} \equiv \frac{bc + ad}{ac}$.

δ) $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} \equiv \frac{bd}{ac}$.

b, α) Supongamos que p es primo, $p > 2$, a es entero, $0 < a < p - 1$. Demostrar que

$$\binom{p-1}{a} \equiv (-1)^{\alpha} \ (\text{mód. } p).$$

β) Sea p un número primo, $p > 2$. Demostrar que

$$\frac{2^p-2}{p} \equiv 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{p-1} \pmod{p}.$$

5, **a.** Sea d un divisor del número a, que no sea divisible por el cuadrado de un número entero superior a 1 y tampoco por los números primos menores que n, y sea $\varkappa$ el número de divisores primos distintos del número d. Demostrar que en la sucesión

$$1 \cdot 2 \ldots n,\ 2 \cdot 3 \ldots (n+1),\ \ldots,\ a(a+1) \ldots (a+n-1)\ (1)$$

hay $\frac{n^{\varkappa} a}{d}$ números que son múltiplos de d.

b. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_k$ los divisores primos distintos del número a, donde ninguno de ellos es inferior a n. Demostrar que la cantidad de números de la sucesión (1) que son primos con a, es igual a

$$a\left(1 - \frac{n}{p_1}\right)\left(1 - \frac{n}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{n}{p_k}\right).$$

6. Sea $m_{1,2,\ldots,k}$ el mínimo común múltiplo de los números $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

a. Supongamos que $d = (m_1, m_2)$. Demostrar que el sistema

$$x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \quad x \equiv b_2 \pmod{m_2}$$

admite solución, y sólo cuando, $b_2 - b_1$ es múltiplo de d. Además, cuando admite solución, el conjunto de valores de x que satisfacen a este sistema se determina por una congruencia de la forma

$$x \equiv x_{1,2} \pmod{m_{1,2}}.$$

b. Demostrar que en caso de que el sistema
$x \equiv b_1 \pmod{m_1}$, $x \equiv b_2 \pmod{m_2}$, $\ldots$, $x \equiv b_k \pmod{m_k}$
admita solución, el conjunto de valores x que le satisfacen se determina por una congruencia de la forma

$$x \equiv x_{1,2,\ldots,k} \pmod{m_{1,2,\ldots,k}}.$$

7. Supongamos que m es entero, $m>1$, a y b son enteros,

$$\left(\frac{a,\ b}{m}\right)=\sum_{x} e^{2\pi i\,\frac{ax+bx'}{m}},$$

donde x recorre el sistema reducido de restos respecto del módulo m, y $x'\equiv\frac{1}{x}$ (mód. m) (en el sentido de la pregunta 4, a). Demostrar las siguientes propiedades del símbolo $\left(\frac{a,\ b}{m}\right)$:

α) $\left(\frac{a,\ b}{m}\right)$ es real.

β) $\left(\frac{a,\ b}{m}\right)=\left(\frac{b,\ a}{m}\right)$.

γ) Si $(h,\ m)=1$ se tiene $\left(\frac{a,\ bh}{m}\right)=\left(\frac{ah,\ b}{m}\right)$.

δ) Si $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k$ son primos dos a dos, haciendo $m_1,\ m_2\ldots m_k=m$, $M-M_sm_s$, se tiene

$$\left(\frac{a_1,\ 1}{m_1}\right)\left(\frac{a_2,\ 1}{m_2}\right)\ldots\left(\frac{a_k,\ 1}{m_k}\right)=$$
$$=\left(\frac{M_1^2a_1+M_2^2a_2+\ldots+m_k^2a_k,\ 1}{m}\right).$$

8. Supongamos que la congruencia

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\equiv 0\ (\text{mód. } p)$$

admite n soluciones

$$x\equiv x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\ (\text{mód. } p).$$

Demostrar que

$$a_1\equiv -a_0S_1\ (\text{mód. } p),$$
$$a_2\equiv a_0S_2\ (\text{mód. } p),$$
$$a_3\equiv -a_0S_3\ (\text{mód. } p),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n\equiv(-1)^n a_0S_n\ (\text{mód. } p),$$

donde S_1 es la suma de todas las x_s, S_2 es la suma de sus productos dos a dos, S_3 es la suma de sus productos tres a tres, etc.

9, a. Demostrar el teorema de Wilson, considerando los pares de números x, x' de la sucesión $2, 3, \ldots, p-2$, que satisfacen a la condición $xx' \equiv 1 \pmod{p}$.
b. Sea P entero, $P > 1$, $1, 2 \ldots (P-1) + 1 \equiv 0 \pmod{P}$. Demostrar que P es primo.
10, a. Sea $(a_0, m) = 1$. Indicar una congruencia de n-ésimo grado con el coeficiente superior igual a 1, que sea equivalente a la congruencia

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod{m}.$$

b. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la congruencia $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$; $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$; $n \leqslant p$, admita n soluciones, es que sean divisibles por p todos los coeficientes del resto de la división de $x^p - x$ por $f(x)$.
c. Sea n un divisor de $p-1$, $n > 1$, $(A, p) = 1$. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que sea resoluble la congruencia $x^n \equiv A \pmod{p}$ es que se cumpla la congruencia $A^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p}$; además, en caso de resolubilidad, la congruencia indicada admite n soluciones.
11. Supongamos que n es entero, $n > 0$, $(A, m) = 1$, y que se conoce una solución $x \equiv x_0 \pmod{m}$ de la congruencia $x^n \equiv A \pmod{m}$. Demostrar que todas las soluciones de esta congruencia se expresan por el producto de x_0 por los restos de las soluciones de la congruencia $y^n \equiv 1 \pmod{m}$.

Ejercicios numéricos referentes al capítulo IV

1, a. Resolver la congruencia $256x \equiv 179 \pmod{337}$.
b. Resolver la congruencia $1\,215x \equiv 560 \pmod{2\,755}$.
2, a. Resolver las congruencias de los ejercicios **1, a** y **1, b** por el método de la pregunta **2, c**.
b. Resolver la congruencia $1\,296x \equiv 1\,105 \pmod{2\,413}$ por el método de la pregunta **2, c**.
3. Hallar todos los pares de números enteros x, y que satisfacen a la ecuación indeterminada $47x - 111y = 89$.

4, a. Indicar la solución general para el sistema

$$x \equiv b_1 \text{ (mód. 13)}, \quad x \equiv b_2 \text{ (mód. 17)}.$$

Sirviéndose de esta solución general, hallar luego tres números que al dividirlos por 13 y 17 den los restos 1 y 12, 6 y 8, 11 y 4, respectivamente.

b. Indicar la solución general para el sistema

$$x \equiv b_1 \text{ (mód. 25)}, \ x \equiv b_2 \text{ (mód. 27)}, \ x \equiv b_3 \text{ (mód. 59)}.$$

5, a. Resolver el sistema de congruencias (pregunta 6, a)

$$x \equiv 3 \text{ (mod. 8)}, \ x \equiv 11 \text{ (mód. 20)}, \ x \equiv 1 \text{ (mód. 15)}.$$

b. Resolver el sistema de congruencias

$$x \equiv 1 \text{ (mód. 3)}, \quad x \equiv 4 \text{ (mód. 5)}, \quad x \equiv 2 \text{ (mód. 7)},$$
$$x \equiv 9 \text{ (mód. 11)}, \quad x \equiv 3 \text{ (mód. 13)}.$$

6. Resolver el sistema de congruencias

$$3x + 4y - 29 \equiv 0 \text{ (mód. 143)}, \quad 2x - 9y + 84 \equiv 0 \text{ (mód. 143)}.$$

7, a. ¿A qué congruencia de grado inferior a 5 es equivalente la congruencia

$$3x^{14} + 4x^{13} + 3x^{12} + 2x^{11} + x^9 + 2x^8 + 4x^7 + x^6 + 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x \equiv 0 \text{ (mód. 5)?}$$

b. ¿A qué congruencia de grado inferior a 7 es equivalente la congruencia

$$2x^{17} + 6x^{16} + x^{14} + 5x^{12} + 3x^{11} + 2x^{10} + x^9 + 5x^8 + 2x^7 + 3x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + 4 \equiv 0 \text{ (mód. 7) ?}$$

8. ¿A qué congruencia, con el coeficiente superior igual a 1, es equivalente la congruencia (pregunta 10, a)

$$70x^6 + 78x^5 + 25x^4 + 68x^3 + 52x^2 + 4x + 3 \equiv 0 \text{ (mód. 101)?}$$

9, a. Resolver la congruencia

$$f(x) \equiv 0 \text{ (mód. 27)}, \quad f(x) = 7x^4 + 19x + 25,$$

hallando primero mediante un tanteo todas las soluciones de la congruencia

$$f(x) \equiv 0 \text{ (mód. 3)}.$$

b. Resolver la congruencia $9x^2 + 29x + 62 \equiv 0$ (mód. 64).

10, a. Resolver la congruencia $x^3 + 2x + 2 \equiv 0$ (mód. 125).

b. Resolver la congruencia $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 12 \equiv 0$ (mód. 625).

11, a. Resolver la congruencia $6x^3 + 27x^2 + 17x + 20 \equiv 0$ (mód. 30).

b. Resolver la congruencia $31x^4 + 57x^3 + 96x + 191 \equiv 0$ (mód. 225).

CAPITULO QUINTO

Congruencias de segundo grado

§ 1. Teoremas generales **a.** Entre las congruencias de grado $n > 1$, a continuación se estudiarán solamente las más simples, precisamente, las *congruencias binómicas*:

$$x^n \equiv a \text{ (mód. } m); \quad (a, m) = 1. \tag{1}$$

Si la congruencia (1) admite solución, el número a se llama *resto de grado n*, en caso contrario, a se llama *no-resto de grado n*. En particular, si $n = 2$, los restos y los no-restos se llaman *cuadráticos*; si $n = 3$, *cúbicos*; si $n = 4$, *bicuadráticos.*

b. En el presente capítulo se estudiará detalladamente el caso $n = 2$ y, en primer lugar, las congruencias binómicas de segundo grado respecto de un módulo impar p:

$$x^2 \equiv a \text{ (mód. } p); \quad (a, p) = 1. \tag{2}$$

c. *Si a es un resto cuadrático respecto del módulo p, la congruencia* (2) *tiene dos soluciones.*

En efecto, si a es un resto cuadrático, la congruencia (2) admite al menos una solución $x \equiv x_1$ (mód. p). Pero entonces, como $(-x_1)^2 = x_1^2$, la misma congruencia admite también una segunda solución $x \equiv -x_1$ (mód. p). Esta segunda solúción es distinta de la primera, puesto que de $x_1 \equiv -x_1$ (mód. p)

tendríamos que $2x_1 \equiv 0$ (mód. p), lo cual es imposible, ya que $(2, p) = (x_1, p) = 1$.

Estas dos soluciones indicadas agotan todas las soluciones de la congruencia (2), puesto que esta última, siendo una congruencia de segundo grado, no puede admitir más de dos soluciones (c, § 4, cap IV).

d. *El sistema reducido de restos respecto del módulo p consta de* $\frac{p-1}{2}$ *restos cuadráticos, los cuales son congruentes con los números*

$$1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2, \tag{3}$$

y de $\frac{p-1}{2}$ *no-restos cuadráticos.*

En efecto, entre los restos del sistema reducido respecto del módulo p, son restos cuadráticos aquéllos, y sólo aquellos, que son congruentes con los cuadrados de los números (sistema reducido de restos)

$$-\frac{p-1}{2}, \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}, \tag{4}$$

es decir, con los números (3). Por otra parte, los números (3) no son congruentes entre sí respecto del módulo p, puesto que de $k^2 \equiv l^2$ (mód. p), $0 < k < l \leqslant \frac{p-1}{2}$, se deduciría, en contra de c, que a la congruencia $x^2 \equiv l^2$ (mód. p) la satisfacen cuatro de los números (4): $x = -l, -k, k, l$.

e. *Si a es un resto cuadrático respecto del módulo p, se tiene:*

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (mód. } p); \tag{5}$$

si a es un no-resto cuadrático respecto del módulo p, se tiene

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (mód. } p). \tag{6}$$

En efecto, según el teorema de Fermat,

$$a^{p-1} \equiv 1 \text{ (mód. } p); \quad \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \text{ (mód. } p).$$

Uno de los factores del primer miembro de la última congruencia, y sólo uno, es divisible por p (ambos factores no pueden simultáneamente ser divisibles por p, pues, en caso contrario, su diferencia 2 sería divisible por p). Por lo tanto, se verifica una de las congruencias (5) y (6), y sólo una.

Pero todo resto cuadrático a satisface para cierto x a la congruencia

$$a \equiv x^2 \ (\text{mód. } p) \tag{7}$$

y, por consiguiente, satisface también a la congruencia (5), la cual puede obtenerse elevando (7), término a término a la potencia $\frac{p-1}{2}$. Además, los restos cuadráticos agotan todas las soluciones de la congruencia (5), puesto que, siendo ésta de grado $\frac{p-1}{2}$, no puede tener más de $\frac{p-1}{2}$ soluciones. Por esto, los no-restos cuadráticos satisfacen a la ecuación (6).

§ 2. Símbolo de Legendre

a. Introduzcamos el *símbolo de Legendre* $\left(\frac{a}{p}\right)$ (se lee así: símbolo de a con respecto a p). Este símbolo se define para todos los números a que no son divisibles por p, y es igual a 1, si a es un resto cuadrático, e igual a -1, si a es un no-resto cuadráitco. El número a se llama numerador del símbolo y el número p, denominador del mismo.

b. En virtud de **e**, **§ 1**, evidentemente, se tiene:

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \ (\text{mód. } p).$$

c. Aquí deduciremos las propiedades principales del símbolo de Legendre y en el párrafo siguiente, las del símbolo de Jacobi (éste es una generalización del símbolo anterior), las cuales facilitarán el cálculo rápido de dicho símbolo, y, por consiguiente, permitirán resolver el problema de la resolubilidad de la congruencia

$$x^2 \equiv a \ (\text{mód. } p).$$

d. *Si* $a \equiv a_1$ (mód. p), *se tiene*, $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a_1}{p}\right)$. Esta propiedad se debe a que los números de una misma clase son simultáneamente restos o no-restos cuadráticos.

e. $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$.

En efecto, $1 = 1^2$ y, por lo tanto, 1 es un resto cuadrático.

f. $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

Esta propiedad se deduce de **b** para $a = -1$.

Como $\frac{p-1}{2}$ es par si p es de la forma $4m+1$ y es impar si p es de la forma $4m+3$, de aquí se deduce que -1 es un resto cuadrático respecto del módulo p, si p es de la forma $4m+1$, y es un no-resto cuadrático respecto del módulo p, si p es de la forma $4m+3$.

g. $\left(\frac{ab\ldots l}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)\ldots\left(\frac{l}{p}\right)$.

En efecto, se tiene:

$$\left(\frac{ab\ldots l}{p}\right) \equiv (ab\ldots l)^{\frac{p-1}{2}} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} \ldots l^{\frac{p-1}{2}} \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)\ldots\left(\frac{l}{p}\right) \text{ (mód. } p\text{)},$$

de donde se deduce lo que se afirmaba. De aquí, como consecuencia, resulta que

$$\left(\frac{ab^2}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right),$$

o sea, en el numerador del símbolo de Legendre se puede despreciar cualquier factor cuadrado.

h. Para deducir las propiedades ulteriores del símbolo de Legendre daremos primero otra interpretación del mismo.

Haciendo $p_1 = \frac{p-1}{2}$, consideremos las congruencias

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot 1 \equiv \varepsilon_1 r_1 (\text{mód. } p), \\ a\cdot 2 \equiv \varepsilon_2 r_2 (\text{mód. } p), \\ \dots\dots\dots\dots \\ a\cdot p_1 \equiv \varepsilon_{p_1} r_{p_1} (\text{mód. } p), \end{array}\right\} \quad (1)$$

donde $\varepsilon_x r_x$ es el resto absoluto mínimo de ax, r_x es su módulo, de modo que $\varepsilon_x = \pm 1$.

Los números $a\cdot 1$, $-a\cdot 1$, $a\cdot 2$, $-a\cdot 2$, ..., $a\cdot p_1$, $-a\cdot p_1$ forman el sistema reducido de restos respecto del módulo p (c, § 5, cap. **III**); sus restos mínimos absolutos son $\varepsilon_1 r_1$, $-\varepsilon_1 r_1$, $\varepsilon_2 r_2$, $-\varepsilon_2 r_2$, ..., $\varepsilon_{p_1} r_{p_1}$, $-\varepsilon_{p_1} r_{p_1}$. Los positivos entre estos últimos, es decir, r_1, r_2, ..., r_{p_1}, tienen que coincidir con los números 1, 2, ..., p_1 (**b**, § **4**, cap. **III**).

Multiplicando ahora las congruencias (1) y simplificando por

$$1\cdot 2 \ldots p_1 = r_1 r_2 \ldots r_{p_1},$$

obtenemos $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{p_1} (\text{mód. } p)$, de donde, (**b**), se tiene

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{p_1}. \quad (2)$$

i. Demos una forma más terminada a la expresión hallada del símbolo de Legendre. Se tiene

$$\left[\frac{2ax}{p}\right] = \left[2\left[\frac{ax}{p}\right] + 2\left\{\frac{ax}{p}\right\}\right] = 2\left[\frac{ax}{p}\right] + \left[2\left\{\frac{ax}{p}\right\}\right],$$

lo cual es par o impar según que el resto mínimo no negativo del número ax sea menor o mayor que $\frac{1}{2}p$, es decir, según que sea $\varepsilon_x = 1$ o $\varepsilon_x = -1$. De aquí, evidentemente, se tiene

$$\varepsilon_x = (-1)^{\left[\frac{2ax}{p}\right]},$$

por lo cual, de (2), hallamos:

$$\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{2ax}{p}\right]}.$$

j. Suponiendo a impar, transformemos la última igualdad. Se tiene ($a+p$ es par)

$$\left(\frac{2a}{p}\right)=\left(\frac{2a+2p}{p}\right)=\left(\frac{4\frac{a+p}{2}}{p}\right)=\left(\frac{\frac{a+p}{2}}{p}\right)=$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{(a+p)x}{p}\right]}=(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{ax}{p}\right]+\sum\limits_{x=1}^{p_1}x},$$

de donde

$$\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{ax}{p}\right]+\frac{p^2-1}{8}}. \qquad (3)$$

La fórmula (3) nos permitirá deducir dos propiedades muy importantes del símbolo de Legendre.

k.

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Es consecuencia de la fórmula (3) para $a=1$.
Pero p puede expresarse en la forma $p=8m+s$, donde s es uno de los números 1, 3, 5, 7. Además $\frac{p^2-1}{8}=8m^2+$ $+2ms+\frac{s^2-1}{8}$, siendo este número par si $s=1$ ó $s=7$ e impar si $s=3$ ó $s=5$. Por lo tanto, el número 2 es un resto cuadrático respecto del módulo p si p es de la forma $8m+1$ o de la forma $8m+7$ y es un no-resto cuadrático respecto del módulo p si p es de la forma $8m+3$ o de la forma $8m+5$.

1. *Si p y q son primos impares, se tiene (ley recíproca de los restos cuadráticos).*

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right).$$

Como $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{1}$ es impar solamente cuando ambos números p y q son de la forma $4m+3$, y es par si al menos uno de estos números es de la forma $4m+1$, la propiedad señalada se puede formular así:
Si ambos números p y q son de la forma $4m+3$, se tiene:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{p}{q}\right);$$

si al menos uno de ellos es de la forma $4m+1$, se tiene:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right).$$

Para llevar a cabo la demostración, obsérvese que, en virtud de **к**, la fórmula (3) toma la forma

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{p_1}\left[\frac{ax}{p}\right]}. \qquad (4)$$

Haciendo ahora $\frac{q-1}{2} = q_1$, consideremos los p_1q_1 pares de números que se obtienen cuando en las expresiones qx, py los números x e y recorren, independientemente uno del otro, los sistemas de valores

$$x = 1, 2, \ldots, p_1, \; y = 1, 2, \ldots, q_1.$$

Nunca puede ocurrir que sea $qx = py$, puesto que de esta igualdad se deduciría que py es múltiplo de q, lo cual es imposible, puesto que $(p, q) = (y, q) = 1$ (ya que $0 < y < q$). Por lo tanto, se puede hacer $p_1q_1 = S_1 + S_2$, donde S_1 es el número de pares con $qx < py$ y S_2 es el número de pares con $py < qx$.

Evidentemente, S_1 es también el número de pares con $x < \frac{p}{q} y$. Aquí, para cada y dado se puede tomar $x = 1, 2, \ldots, \left[\frac{p}{q} y\right]$. $\left(\text{Como } \frac{p}{q} y \leqslant \frac{p}{q} q_1 < \frac{p}{2}, \text{ se tiene } \left[\frac{p}{q} y\right] \leqslant \leqslant p_1\right)$. Por consiguiente,

$$S_1 = \sum_{y=1}^{q_1} \left[\frac{p}{q} y\right].$$

De un modo análogo, nos convencemos de que

$$S_2 = \sum_{x=1}^{p_1} \left[\frac{q}{p} x\right].$$

Pero entonces, según la igualdad (4), se tiene

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{S_1}, \quad \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{S_2},$$

por lo cual,

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{S_1+S_2} = (-1)^{p_1 q_1},$$

de donde se deduce la propiedad indicada.

§ 3. Símbolo de Jacobi

a. Para conseguir mayor rapidez en el cálculo del símbolo de Legendre, se considera el *símbolo más general de Jacobi*. Sea P impar, mayor que la unidad, y sea $P = p_1 p_2 \ldots p_r$ su descomposición en factores primos (entre ellos también puede haber iguales). Supongamos también que $(a, P) = 1$. Entonces el símbolo de Jacobi $\left(\frac{a}{P}\right)$ se define por la igualdad [1])

$$\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right) \ldots \left(\frac{a}{p_r}\right).$$

---

[1]) En el segundo miembro, $\left(\frac{a}{p_s}\right)$ denota el símbolo de Legendre. Por lo tanto, para P primo, los símbolos de Jacobi y de Legendre coinciden (*N. del T.*).

Las propiedades conocidas del símbolo de Legendre permiten establecer las propiedades análogas para el símbolo de Jacobi.

b. *Si* $a \equiv a_1$ (mód. P), *se tiene* $\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{a_1}{P}\right)$.

En efecto,

$$\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right) \dots \left(\frac{a}{p_r}\right) = \left(\frac{a_1}{p_1}\right)\left(\frac{a_1}{p_2}\right) \dots$$
$$\dots \left(\frac{a_1}{p_r}\right) = \left(\frac{a_1}{P}\right),$$

puesto que a, siendo congruente con a_1 respecto del módulo P, es también congruente con a_1 respecto de los módulos p_1, $p_2, \dots, p_r$, ya que éstos son divisores de P.

c. $\left(\frac{1}{P}\right) = 1$.

En efecto,

$$\left(\frac{1}{P}\right) = \left(\frac{1}{p_1}\right)\left(\frac{1}{p_2}\right) \dots \left(\frac{1}{p_r}\right) = 1.$$

d. $\left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}}$.

Para demostrar esto, obsérvese que

$$\left(\frac{-1}{P}\right) = \left(\frac{-1}{p_1}\right)\left(\frac{-1}{p_2}\right) \dots \left(\frac{-1}{p_r}\right) =$$
$$= (-1)^{\frac{p_1-1}{2}+\frac{p_2-1}{2}+\dots+\frac{p_r-1}{2}}; \qquad (1)$$

pero

$$\frac{P-1}{2} = \frac{p_1 p_2 \dots p_r - 1}{2} =$$
$$= \frac{\left(1+2\frac{p_1-1}{2}\right)\left(1+2\frac{p_2-1}{2}\right)\dots\left(1+2\frac{p_r-1}{2}\right)-1}{2} =$$
$$= \frac{p_1-1}{2} + \frac{p_2-1}{2} + \dots + \frac{p_r-1}{2} + 2N,$$

en virtud de lo cual, de la fórmula (1) deducimos que

$$\left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}}.$$

e. $\left(\frac{ab\ldots l}{P}\right)=\left(\frac{a}{P}\right)\left(\frac{b}{P}\right)\ldots\left(\frac{l}{P}\right)$.

En efecto,

$$\left(\frac{ab\ldots l}{P}\right)=\left(\frac{ab\ldots l}{p_1}\right)\ldots\left(\frac{ab\ldots l}{p_r}\right)=$$

$$=\left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{b}{p_1}\right)\ldots\left(\frac{l}{p_1}\right)\ldots\left(\frac{a}{p_r}\right)\left(\frac{b}{p_r}\right)\ldots\left(\frac{l}{p_r}\right);$$

reuniendo los símbolos que tienen iguales numeradores, se obtiene la propiedad en cuestión. De aquí resulta la consecuencia

$$\left(\frac{ab^2}{P}\right)=\left(\frac{a}{P}\right).$$

f. $\left(\frac{2}{P}\right)=(-1)^{\frac{P^2-1}{8}}$.

En efecto,

$$\left(\frac{2}{P}\right)=\left(\frac{2}{p_1}\right)\left(\frac{2}{p_2}\right)\ldots\left(\frac{2}{p_r}\right)=$$

$$=(-1)^{\frac{p_1^2-1}{8}+\frac{p_2^2-1}{8}+\ldots+\frac{p_r^2-1}{8}}. \quad (2)$$

Pero

$$\frac{P^2-1}{8}=\frac{p_1^2p_2^2\ldots p_r^2-1}{8}=$$

$$=\frac{\left(1+8\frac{p_1^2-1}{8}\right)\left(1+8\frac{p_2^2-1}{8}\right)\ldots\left(1+8\frac{p_r^2-1}{8}\right)-1}{8}=$$

$$=\frac{p_1^2-1}{8}+\frac{p_2^2-1}{8}+\ldots+\frac{p_r^2-1}{8}+2N,$$

en virtud de lo cual, de la fórmula (2) deducimos que

$$\left(\frac{2}{P}\right)=(-1)^{\frac{P^2-1}{8}}.$$

g. *Si* P y Q *son números impares positivos, primos entre sí, se tiene*

$$\left(\frac{Q}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}\left(\frac{P}{Q}\right).$$

En efecto, supongamos que $Q=q_1q_2\ldots q_s$ es la descomposición de Q en factores primos (entre éstos, de nuevo puede haber iguales). Se tiene

$$\left(\frac{Q}{P}\right)=\left(\frac{Q}{p_1}\right)\left(\frac{Q}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{Q}{p_r}\right)=\prod_{\alpha=1}^{r}\prod_{\beta=1}^{s}\left(\frac{q_\beta}{p_\alpha}\right)=$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{\alpha=1}^{r}\sum\limits_{\beta=1}^{s}\frac{p_\alpha-1}{2}\cdot\frac{q_\beta-1}{2}}\prod_{\alpha=1}^{r}\prod_{\beta=1}^{s}\left(\frac{p_\alpha}{q_\beta}\right)=$$

$$=(-1)^{\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{r}\frac{p_\alpha-1}{2}\right)\left(\sum\limits_{\beta=1}^{s}\frac{q_\beta-1}{2}\right)}\left(\frac{P}{Q}\right).$$

Pero, de un modo semejante a lo que se hizo en **d**, hallamos

$$\frac{P-1}{2}=\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{p_\alpha-1}{2}+2N,\quad \frac{Q-1}{2}=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{q_\beta-1}{2}+2N_1,$$

en virtud de lo cual, la última fórmula implica que

$$\left(\frac{Q}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}\left(\frac{P}{Q}\right).$$

Ejemplo. Como un ejemplo de cálculo del símbolo de Legendre (además, a éste lo vamos a considerar como un caso particular del símbolo de Jacobi) averiguemos si admite solución la congruencia

$$x^2\equiv 219\ (\text{mód. } 383).$$

Se tiene (aplicando sucesivamente las propiedades **g**, **b**, la consecuencia **e**, **g**, **b**, **e**, **f**, **g**, **b**, **d**):

$$\left(\frac{219}{383}\right)=-\left(\frac{383}{219}\right)=-\left(\frac{164}{219}\right)=-\left(\frac{41}{219}\right)=$$

$$=-\left(\frac{219}{41}\right)=-\left(\frac{14}{41}\right)=-\left(\frac{2}{41}\right)\left(\frac{7}{41}\right)=$$

$$=-\left(\frac{7}{41}\right)=-\left(\frac{41}{7}\right)=-\left(\frac{-1}{7}\right)=1;$$

por lo tanto, la congruencia considerada tiene dos soluciones.

§ 4. *Caso de un módulo compuesto*

a. Las congruencias de segundo grado respecto de un módulo compuesto se estudian y resuelven de acuerdo a las indicaciones del **§ 5**, cap. **IV**.

b. Comencemos con las congruencias de la forma

$$x^2 \equiv a \text{ (mód. } p^\alpha); \quad \alpha > 0, \quad (a, p) = 1, \tag{1}$$

donde p es un número primo impar.

Haciendo $f(x) = x^2 - a$, se tiene $f'(x) = 2x$, y si $x \equiv \equiv x_1$ (mód. p) es una solución de la congruencia

$$x^2 \equiv a \text{ (mód. } p), \tag{2}$$

entonces, en virtud de que $(a, p) = 1$ también $(x_1, p) = 1$, y como p es impar, resulta $(2x_1, p) = 1$, es decir, $f'(x_1)$ no es divisible por p. Por lo tanto, para la búsqueda de las soluciones de la congruencia (1) se pueden aplicar los razonamientos **b, § 5**, cap **IV**, proporcionando cada solución de la congruencia (2) una solución de la congruencia (1). De lo expuesto deducimos que:

La congruencia (1) *tiene dos soluciones o ninguna, según que el número a sea un resto cuadrático o un no-resto cuadrático respecto del módulo p.*

c. Consideremos ahora la congruencia

$$x^2 \equiv a \text{ (mód. } 2^\alpha); \quad \alpha > 0, \quad (a, 2) = 1. \tag{3}$$

En este caso $f'(x_1) = 2x_1$ es divisible por 2, por lo cual no pueden aplicarse los razonamientos expuestos en **b, § 5**, cap **IV**; éstos deben modificarse del modo siguiente:

d. Si la congruencia (3) admite solución, entonces, como $(a, 2) = 1$, se tiene $(x, 2) = 1$; por consiguiente (**k, § 2**), $x^2 - 1$ es divisible por 8. Por esta razón, reduciendo la congruencia (3) a la forma

$$(x^2 - 1) + 1 \equiv a \text{ (mód. } 2^\alpha).$$

nos convencemos de que para que esta congruencia admita solución es necesario que sea

$$a \equiv 1 \ (\text{mód. } 4) \ \text{si } \alpha = 2; \quad a \equiv 1 \ (\text{mód. } 8) \ \text{si } \alpha \geqslant 3. \quad (4)$$

e. Supongamos cumplidas las condiciones (4), examinemos el problema de la búsqueda de las soluciones y de la cantidad de ellas.

En virtud de **d**, en los casos en que $\alpha \leqslant 3$, a la congruencia satisfacen todos los números impares. Por lo tanto, la congruencia $x^2 \equiv a$ (mód. 2) tiene una solución: $x \equiv 1$ (mod. 2) la congruencia $x^2 \equiv a$ (mód. 4) tiene dos soluciones: $x \equiv 1$; 3 (mód. 4), la congruencia $x^2 \equiv a$ (mód. 8) tiene cuatro soluciones: $x \equiv 1$;, 3; 5; 7 (mód. 8).

Para examinar los casos $\alpha = 4, 5, \ldots$ es convergente reunir todos los números impares en dos progresiones aritméticas:

$$x = \pm (1 + 4t_3) \quad (5)$$

$(1 + 4t_3 \equiv 1$ (mód. 4); $-1 -4t_3 \equiv -1 \equiv 3$ (mód. 4)).

Veamos cuáles de los números (5) satisfacen a la congruencia $x^2 \equiv a$ (mód. 16). Obtenemos

$$(1 + 4t_3)^2 \equiv a \ (\text{mód. } 16), \quad t_3 \equiv \frac{a-1}{8} \ (\text{mód. } 2),$$

$$t_3 = t_3' + 2t_4, \quad x = \pm (1 + 4t_3' + 8t_4) = \pm (x_4 + 8t_4).$$

Veamos cuáles de los últimos números satisfacen a la congruencia $x^2 \equiv a$ (mod. 32). Obtenemos

$$(x_4 + 8t_4)^2 \equiv a \ (\text{mód. } 32), \quad t_4 = t_4' + 2t_5,$$

$$x = \pm (x_5 + 16t_5),$$

etc. De este modo, demostramos que para cualquier $\alpha > 3$ los valores x que satisfacen a la congruencia (3) se expresan en la forma

$$x = \pm (x_\alpha + 2^{\alpha-1}t_\alpha).$$

Estos valores x forman cuatro soluciones distintas de la congruencia (3)

$$x \equiv x_\alpha; \quad x_\alpha + 2^{\alpha-1}; \quad -x_\alpha; \quad -x_\alpha - 2^{\alpha-1} \ (\text{mód. } 2^\alpha)$$

(respecto del módulo 4, las dos primeras son congruentes con 1 y las dos últimas con —1).

Ejemplo. La congruencia

$$x^2 \equiv 57 \text{ (mód. } 64) \qquad (6)$$

admite cuatro soluciones, puesto que $57 \equiv 1$ (mód. 8). Expresando x en la forma $x = \pm (1 + 4t_3)$, obtenemos

$$(1 + 4t_3)^2 \equiv 57 \text{ (mód. } 16), \ 8t_3 \equiv 56 \text{ (mód. } 16),$$
$$t_3 \equiv 1 \text{ (mód. } 2), \ t_3 = 1 + 2t_4, \ x = \pm (5 + 8t_4),$$
$$(5 + 8t_4)^2 \equiv 57 \text{ (mód. } 32), \ 5 \cdot 16t_4 \equiv 32 \text{ (mód. } 32),$$
$$t_4 \equiv 0 \text{ (mód. } 2), \ t_4 = 2t_5, \ x = \pm (5 + 16t_5),$$
$$(5 + 16t_5)^2 \equiv 57 \text{ (mód. } 64), \ 5 \cdot 32t_5 \equiv 32 \text{ (mód. } 64).$$
$$t_5 \equiv 1 \text{ (mód. } 2), \ t_5 = 1 + 2t_6, \ x = \pm (21 + 32t_6).$$

Por lo tanto, las soluciones de la congruencia (6) son:

$$x \equiv \pm 21; \quad \pm 53 \text{ (mód. } 64).$$

f. De **c**, **d** y **e** se deduce que:

Para la congruencia

$$x^2 \equiv a \text{ (mód. } 2^\alpha); \quad (a, 2) = 1$$

las condiciones necesarias de resolubilidad son: $a \equiv 1$ (mód. 4) *si* $\alpha = 2$, $a \equiv 1$ (mód. 8) *si* $\alpha \geqslant 3$. *Si se cumplen estas condiciones, el número de soluciones es igual a*: 1 *si* $\alpha = 1$; 2 *si* $\alpha = 2$; 4 *si* $\alpha \geqslant 3$.

g. De **b**, **f** y **a**, § **5**, cap **IV** se deduce que:

Para la congruencia de la forma general

$$x^2 \equiv a \text{ (mód. } m); \quad m = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}; \quad (a, m) = 1$$

las condiciones necesarias de resolubilidad son:

$$a \equiv 1 \text{ (mód. } 4) \ \text{si} \ \alpha = 2, \quad a \equiv 1 \text{ (mód. } 8) \ \text{si} \ \alpha \geqslant 3,$$
$$\left(\frac{a}{p_1}\right) = 1, \ \left(\frac{a}{p_2}\right) = 1, \ \ldots, \left(\frac{a}{p_k}\right) = 1.$$

Si se cumplen todas estas condiciones, el número de soluciones es igual a: 2^k *si* $\alpha = 0$ y *si* $\alpha = 1$; 2^{k+1} *si* $\alpha = 2$; 2^{k+2} *si* $\alpha \geqslant 3$.

Preguntas referentes al capítulo V

A continuación, la letra p denotará siempre un número primo impar.

1. Demostrar que la búsqueda de las soluciones de una congruencia de la forma

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \text{ (mód. } m), \quad (2a, m) = 1,$$

se reduce a la búsqueda de las soluciones de una congruencia de la forma $x^2 \equiv q$ (mód. m).

2. a. Aplicando **e**, § **1**, hallar las soluciones de la congruencia (en caso de que ello sea posible)

$$x^2 \equiv a \text{ (mód. } p); \quad p = 4m + 3.$$

b. Aplicando **b** y **k**, § **2**, indicar un método para buscar las soluciones de las congruencias de la forma

$$x^2 \equiv a \text{ (mód. } p); \quad p = 8m + 5.$$

c. Indicar el método más sencillo posible para buscar las soluciones de las congruencias de la forma

$$x^2 \equiv a \text{ (mód. } p); \quad p = 8m + 1,$$

si se conoce un número N que es un no-resto cuadrático respecto del módulo p.

d. Aplicando el teorema de Wilson, demostrar que las soluciones de la congruencia

$$x^2 + 1 \equiv 0 \text{ (mód. } p); \quad p = 4m + 1$$

son

$$x \equiv \pm 1 \cdot 2 \ldots 2m \text{ (mód. } p).$$

3, a. Demostrar que la congruencia

$$x^2 + 1 \equiv 0 \text{ (mód. } p) \qquad (1)$$

admite solución cuando, y sólo cuando, p es de la forma $4m + 1$; la congruencia

$$x^2 + 2 \equiv 0 \text{ (mód. } p) \qquad (2)$$

admite solución cuando, y sólo cuando, p, es de la forma $8m+1$ ó $8m+3$; la congruencia

$$x^2+3 \equiv 0 \text{ (mód. } p) \qquad (3)$$

admite solución cuando, y sólo cuando, p es de la forma $6m+1$.

b. Demostrar que la cantidad de números primos de la forma $4m+1$ es infinita.

c. Demostrar que la cantidad de números primos de la forma $6m+1$ es infinita.

4. Supongamos que, dividiendo a los números $1, 2, \ldots, p-1$ en dos conjuntos, de modo que el segundo contenga al menos un número, se tiene:

el producto de dos números de un conjunto es congruente respecto del módulo p con un número del primer conjunto, mientras que el producto de dos números de distintos conjuntos es congruente respecto del módulo p con un número del segundo conjunto. Demostrar que esto ocurre cuando, y sólo cuando, el primer conjunto consta de los restos cuadráticos y el segundo, de los no-restos cuadráticos respecto del módulo p.

5, a. Deducir la teoría de las congruencias de la forma

$$x^2 \equiv a \text{ (mód. } p^\alpha); \quad (a, p) = 1,$$

expresando a y x en el sistema de numeración de base p.

b. Deducir la teoría de las congruencias de la forma

$$x^2 \equiv a \text{ (mód. } 2^\alpha); \quad (a, 2) = 1,$$

expresando a y x en el sistema de numeración de base 2.

6. Demostrar que las soluciones de la congruencia

$$x^2 \equiv a \text{ (mód. } p^\alpha); \quad (a, p) = 1,$$

son $x \equiv \pm PQ'$ (mód. p^α), donde

$$P = \frac{(z+\sqrt{a})^\alpha + (z-\sqrt{a})^\alpha}{2}, \quad Q = \frac{(z+\sqrt{a})^\alpha - (z-\sqrt{a})^\alpha}{2\sqrt{a}},$$

$$z^2 \equiv a \text{ (mód. } p), \; QQ' \equiv 1 \text{ (mód. } p^\alpha).$$

7. Indicar un método de resolución de la congruencia $x^2 \equiv \equiv 1$ (mód. m), que se base en la circunstancia de que la congruencia expuesta es equivalente a la siguiente: $(x-1)(x+1) \equiv 0$ (mód. m).

8. Sea $\left(\frac{a}{p}\right)=0$ si $(a, p)=p$.

a. Siendo $(k, p)=1$, demostrar que

$$\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x(x+k)}{p}\right)=-1.$$

b. Supongamos que cada uno de los números ε y η tiene uno de los valores ± 1, T es la cantidad de pares x, $x+1$, con la condición $\left(\frac{x}{p}\right)=\varepsilon$, $\left(\frac{x+1}{p}\right)=\eta$, donde $x=1, 2, \ldots$ $\ldots, p-2$. Demostrar que

$$T=\frac{1}{4}\left(p-2-\varepsilon\left(\frac{-1}{p}\right)-\eta-\varepsilon\eta\right).$$

c. Supongamos que $(k, p)=1$,

$$S=\sum_{x}\sum_{y}\left(\frac{xy+k}{p}\right),$$

donde x e y recorren las sucesiones crecientes, formadas por X e Y restos, respectivamente, del sistema completo respecto del módulo p. Demostrar que

$$|S|<\sqrt{XYp}.$$

Para la demostración se debe aplicar la desigualdad[1])

$$S^2 \leqslant X\sum_{x}\left|\sum_{y}\left(\frac{xy+k}{p}\right)\right|^2.$$

---

[1]) Esta desigualdad se obtiene aplicando la desigualdad bien conocida:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

(*N. del T.*).

d. Sea Q entero, $1 < Q < p$,

$$S = \sum_{x=0}^{p-1} S_x^2; \quad S_x = \sum_{z=0}^{Q-1} \left(\frac{x+z}{p}\right).$$

α) Demostrar que $S = (p - Q)\, Q$.

β) Sea λ constante; $0 < \lambda < 1$. Demostrar que la cantidad T de números de la sucesión $x = 0, 1, \ldots, p-1$, para los cuales no se cumple la condición $S_x \leqslant Q^{0,5+0,5\lambda}$, satisface a la condición $T \leqslant pQ^{-\lambda}$.

γ) Sea M entero, $Q = [\sqrt{p}]$, $0 < M$, $M + 2Q \leqslant p$. Demostrar que en la sucesión

$$M, M+1, \ldots, M+2Q-1$$

hay un no-resto cuadrático respecto del módulo p.

9, a. Demostrar que el número de expresiones de un entero $m > 1$ en la forma

$$m = x^2 + y^2, \quad (x, y) = 1, \ x > 0, \ y > 0 \tag{1}$$

es igual al número de soluciones de la congruencia

$$z^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}. \tag{2}$$

Para la demostración, hacer $\tau = \sqrt{m}$, utilizar la expresión de $\alpha = \frac{z}{m}$ según el teorema de la pregunta **4, b**, cap. **I**, y considerar la congruencia que se obtiene al multiplicar término a término (2) por Q^2.

b. Sea a uno de los números 2 y 3. Demostrar que el número de expresiones de un número primo p, con la condición $p > a$, en la forma

$$p = x^2 + ay^2, \quad x > 0, \ y > 0, \tag{3}$$

es igual a la mitad del número de soluciones de la congruencia

$$z^2 + a \equiv 0 \pmod{p}. \tag{4}$$

c. Sea p de la forma $4m + 1$, $(k, p) = 1$,

$$S(k) = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x(x^2+k)}{p}\right).$$

Demostrar que

α) $S(k)$ es un número par.

β) $S(kt^2) = \left(\frac{t}{p}\right) S(k)$.

γ) Si $\left(\frac{r}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$, se tiene (compárese con la pregunta **a**)

$$p = \left(\frac{1}{2} S(r)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} S(n)\right)^2.$$

10. Sea D un entero positivo que no sea el cuadrado de un número entero. Demostrar que:

a. Si para un entero dado k, satisfacen a la ecuación

$$x^2 - Dy^2 = k$$

dos pares de números enteros $x = x_1$, $y = y_1$ y $x = x_2$, $y = y_2$, entonces a la ecuación

$$X^2 - DY^2 = k^2$$

satisfacen los números enteros X, Y que se determinan por la igualdad (el signo $\pm$ se elige arbitrariamente)

$$X + Y\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})(x_2 \pm y_2\sqrt{D}).$$

b. La ecuación (ecuación de Pell)

$$x^2 - Dy^2 = 1 \qquad (1)$$

es resoluble en números enteros positivos x, y.

c. Si x_0, y_0 es el par de números positivos x, y con el valor menor de x (o, lo que es equivalente, con el valor menor de $x + y\sqrt{D}$), que satisface a la ecuación (1), entonces todos los pares de números positivos x, y que satisfacen a esta ecuación, se determinan por la igualdad

$$x + y\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})^r; \quad r = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

11, a. Sea a un número entero.

$$U_{a,p} = \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right) e^{2\pi i \frac{ax}{p}}.$$

α) Siendo $(a, p) = 1$, demostrar que $|U_{a,p}| = \sqrt{p}$.
Para la demostración, se debe multiplicar la suma $U_{a,p}$ por la conjugada que se obtiene al sustituir i por $-i$. Designando con las letras x_1 y x las variables de sumación de la suma fundamental y de la conjugada, respectivamente, se deben reunir aquellos términos del producto en los que para un t dado

$$x_1 \equiv xt \pmod{p},$$

o bien

$$x_1 \equiv x + t \pmod{p}.$$

β) Demostrar que

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \frac{U_{a,p}}{U_{1,p}}.$$

b. Sea $m > 2$, $(a, m) = 1$,

$$S_{a,m} = \sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{ax^2}{m}},$$

α) Demostrar que $S_{a,p} = U_{a,p}$ (pregunta **a**).
β) De los teoremas de las preguntas α) y **a**, α) se deduce que $|S_{a,p}| = \sqrt{p}$. Demostrar el siguiente aserto más general:

$$|S_{a,m}| = \sqrt{m}, \quad \text{si } m \equiv 1 \pmod{2},$$
$$|S_{a,m}| = 0, \quad \text{si } m \equiv 2 \pmod{4},$$
$$|S_{a,m}| = \sqrt{2m}, \quad \text{si } m \equiv 0 \pmod{4}.$$

γ) Sea $m > 1$, $(2A, m) = 1$, $a =$ cualquier número entero. Demostrar que

$$\left|\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{Ax^2 + ax}{m}}\right| = \sqrt{m}.$$

12, a. Supongamos que m es un número entero, superior a 1, z recorre Z números enteros dados, $\sum_z$ denota una suma extendida a todos estos números.

α) Sea la función $\Phi(x)$ tal, que para cualquier $a=1, 2, \ldots$ $\ldots, m-1$ se tiene

$$\left|\sum_z \Phi(z) e^{2\pi i \frac{az}{m}}\right| \leqslant \Delta.$$

Supongamos también que M y Q son enteros, $0 \leqslant M < M + Q \leqslant m$, y que $\sum_z{}'$ denota una suma extendida solamente a aquellos valores de z que son congruentes con los números de la sucesión $M, M+1, \ldots, M+Q-1$ respecto del módulo m. Demostrar que

$$\sum_z{}' \Phi(z) = \frac{Q}{m} \sum_z \Phi(z) + \theta\Delta(\ln m - \delta),$$

donde $|\theta| < 1$, $\delta > 0$ siempre, $\delta > 0{,}5$ si $m \geqslant 12$, $\delta > 1$ si $m \geqslant 60$.

β) Supongamos que para cualquier $a=1, 2, \ldots, m-1$ se tiene

$$\left|\sum_z e^{2\pi i \frac{az}{m}}\right| \leqslant \Delta_0$$

y sea N un número entero arbitrario. Entonces, para

$$l = \left[\frac{2\Delta_0 m}{Z}\right]$$

existe al menos un valor z que es congruente con uno de los números de la sucesión

$$N-l, \ldots, N-1, N, N+1, \ldots, N+l$$

respecto del módulo m.

b. Sean M y Q enteros, $0 < M < M + Q \leqslant p$.

α). Demostrar que

$$\left|\sum_{x=M}^{M+Q-1} \left(\frac{x}{p}\right)\right| < \sqrt{p} \ln p.$$

β) Sea R el número de restos cuadráticos y N el número de no-restos cuadráticos en la sucesión $M, M+1, \ldots$

$\ldots, M+Q-1$. Demostrar que

$$R=\frac{1}{2}Q+\frac{\theta}{2}\sqrt{p}\ln p,\quad N=\frac{1}{2}Q-\frac{\theta}{2}\sqrt{p}\ln p;\ |\theta|<1.$$

γ) Deducir la fórmula de la pregunta β) aplicando el teorema de la pregunta **11**, **b**, β) y el teorema de la pregunta **a**.

δ) Sea $(2A, m) = 1$, M_0 y Q_0 son enteros, $0 < M_0 < M_0 + Q_0 \leqslant m$. Demostrar que para $m \geqslant 60$

$$\left|\sum_{x=M_0}^{M_0+Q_0-1} e^{2\pi i \frac{Ax^2}{m}}\right| < \sqrt{m}\ln m.$$

ε) Supongamos que $(A, p)=1$, M_0 y Q_0 son enteros, $0<M_0<M_0+Q_0\leqslant p$ y T denota la cantidad de números de la sucesión Ax^2, $x=M_0, M_0+1, \ldots, M_0+Q_0-1$, que son congruentes con los números de la sucesión M, $M+1, \ldots, M+Q-1$ respecto del módulo p. Demostrar que para $m\geqslant 60$

$$T=\frac{Q_0Q}{p}+\theta\sqrt{p}(\ln p)^2.$$

c. Deducir las fórmulas de la pregunta **b**, β) examinando la suma

$$\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{\alpha=1}^{p-1}\sum_{x=M}^{M+Q-1}\sum_{y=M}^{M+Q-1}\left(\frac{\alpha}{p}\right)e^{2\pi i\frac{a(x-\alpha y)}{p}}.$$

Ejercicios numéricos referentes al capítulo V

1, a. Señálense los restos cuadráticos entre los restos del sistema reducido respecto del módulo 23.

b. Señálense los no-restos cuadráticos entre los restos del sistema reducido respecto del módulo 37.

2, a. Aplicando **e**, **§ 1**, indicar el número de soluciones de las congruencias

α) $x^2 \equiv 3 \pmod{31}$; β) $x^2 \equiv 2 \pmod{31}$.

b. Indicar el número de soluciones de las congruencias

α) $x^2 \equiv 5 \pmod{73}$; β) $x^2 \equiv 3 \pmod{73}$

3, a. Calculando el símbolo de Jacobi, indicar el número de soluciones de las congruencias

α) $x^2 \equiv 226$ (mód. 563); β) $x^2 \equiv 429$ (mód. 563).

b. Indicar el número de soluciones de las congruencias

α) $x^2 \equiv 3\,766$ (mód. 5 987); β) $x^2 \equiv 3\,149$ (mód. 5 987).

4, a. Aplicando los métodos de las preguntas **2, a**; **2, b**;**2, c** resolver las congruencias

α) $x^2 \equiv 5$ (mód. 19); β) $x^2 \equiv 5$ (mód. 29); γ) $x^2 \equiv 2$ (mód. 97).

b. Resolver las congruencias

α) $x^2 \equiv 2$ (mód. 311); β) $x^2 \equiv 3$ (mód. 277); γ) $x^2 \equiv 11$ (mód. 353).

5, a. Resolver la congruencia $x^2 \equiv 59$ (mód. 125) aplicando los métodos:

α) **b, § 4**; β) de la pregunta **5, a**; γ) de la pregunta **6**.

b. Resolver la congruencia $x^2 \equiv 91$ (mód. 243).

6, a. Resolver la congruencia $x^2 \equiv 41$ (mód. 64) aplicando los métodos:

α) **e, § 4**; β) de la pregunta **5, b**.

b. Resolver la congruencia $x^2 \equiv 145$ (mód. 256).

CAPITULO SEXTO

Raíces primitivas e índices

§ *1. Teoremas generales* a. Si $(a, m) = 1$, existen enteros positivos γ con la condición $a^\gamma \equiv 1 \pmod{m}$, por ejemplo (según el teorema de Euler), $\gamma = \varphi(m)$. El menor de ellos se llama *exponente, al cual pertenece el número a respecto del módulo m.*

b. *Si a pertenece al exponente δ respecto del módulo m, los números $1 = a^0, a^1, \ldots, a^{\delta-1}$ no son congruentes entre sí respecto del módulo m.*

En efecto, si fuese $a^l \equiv a^k \pmod{m}$, $0 \leqslant k < l < \delta$ resultaría que $a^{l-k} \equiv 1 \pmod{m}$, siendo $0 < l - k < \delta$, lo cual contradice a la definición de δ.

c. *Si a pertenece al exponente δ respecto del módulo m, entonces $a^\gamma \equiv a^{\gamma'}$ (mód. m) cuando, y sólo cuando, $\gamma \equiv \gamma'$ (mód. δ); en particular (si $\gamma' = 0$), $a^\gamma \equiv 1$ (mód. m) cuando, y sólo cuando, γ es divisible por δ.*

En efecto, sean r y r_1 los restos no negativos mínimos de los números γ y γ' respecto del módulo δ; entonces, para ciertos enteros q y q_1, se tiene $\gamma = \delta q + r$, $\gamma' = \delta q_1 + r_1$. De aquí, en virtud de que $a^\delta \equiv 1 \pmod{m}$, resulta que

$$a^\gamma = (a^\delta)^q a^r \equiv a^r \pmod{m},$$

$$a^{\gamma'} = (a^\delta)^{q_1} a^{r_1} \equiv a^{r_1} \pmod{m}.$$

Por lo tanto, $a^\gamma \equiv a^{\gamma_1} \pmod{m}$ cuando, y sólo cuando, $a^r \equiv a^{r_1} \pmod{m}$, es decir, (b), cuando $r = r_1$.

d. Como $a^{\varphi(m)} \equiv 1$ (mód. m), de **c** ($\gamma' = 0$) se deduce que $\varphi(m)$ es divisible por δ. Por consiguiente, *los exponentes a los cuales pertenecen los números respecto del módulo m, son divisores de* $\varphi(m)$. El mayor entre estos divisores es el mismo número $\varphi(m)$. Los números que pertenecen al exponente $\varphi(m)$ (si tales existen) se llaman *raíces primitivas respecto del módulo m.*

§ 2. Raíces primitivas respecto de los módulos p^{α} y $2p^{\alpha}$

a. Sea p un número primo impar y $\alpha \geqslant 1$. Demostremos la existencia de raíces primitivas respecto de los módulos p^{α} y $2p^{\alpha}$.

b. *Si x pertenece al exponente ab respecto del módulo m, entonces x^a pertenece al exponente b.*

En efecto, supongamos que x^a pertenece al exponente δ. Entonces $(x^{a\delta}) \equiv 1$ (mód. m), de donde $x^{a\delta} \equiv 1$ (mód. m); por lo tanto (**c**, § 1), $a\delta$ es divisible por ab, es decir, δ es divisible por b. Por otra parte, $x^{ab} \equiv 1$ (mód. m), de donde $(x^a)^b \equiv 1$ (mód. m); por consiguiente (**c**, § 1), b es divisible por δ. Por lo tanto, $\delta = b$.

c. *Si x pertenece al exponente a e y pertenece al exponente b respecto del módulo m, y $(a, b) = 1$, entonces xy pertenece al exponente ab.*

En efecto, supongamos que xy pertenece al exponente δ. Entonces $(xy)^{\delta} \equiv 1$ (mód. m). De aquí resulta que $x^{b\delta} y^{b\delta} \equiv$ $\equiv 1$ (mód. m) y (**c**, § 1) $x^{b\delta} \equiv 1$ (mód. m). Por lo tanto (**c**, § 1), $b\delta$ es divisible por a, y como $(b, a) = 1$, δ es divisible por a. Del mismo modo hallamos que δ es divisible por b. El número δ, siendo divisible por a y por b, y teniendo en cuenta que $(a, b) = 1$, es también divisible por ab. Por otra parte, de $(xy)^{a\delta} \equiv 1$ (mód. m) se deduce (**c**, § 1) que ab es divisible por δ. Por lo tanto, $\delta = ab$.

d. *Existen raíces primitivas respecto del módulo p.*

En efecto, sean

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r \qquad (1)$$

todos los exponentes distintos a que pertenecen los números 1, 2, . . ., $(p-1)$ respecto del módulo p. Supongamos que τ es el mínimo común múltiplo de estos exponentes y que $\tau = q_1^{\alpha_1}, q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}$ es su descomposición canónica. Cada factor $q_s^{\alpha_s}$ de esta descomposición divide al menos a uno de los números δ_j de la sucesión (1), el cual, por consiguiente, puede expresarse en la forma; $\delta_j = aq_s^{\alpha_s}$. Sea ξ_j uno de los números de la sucesión 1, 2, . . ., $p - 1$, pertenecientes al exponente δ_j. Según **b**, el número $\eta_j = \xi_j^a$ pertenece al exponente $q_s^{\alpha_s}$, y según **c**, el producto $g = \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k$ pertenece al exponente $q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k} = \tau$.
Pero, como todos los números (1) dividen a τ, todos los números 1, 2, . . ., $p - 1$ son soluciones (**c**, § **1**) de la congruencia $x^\tau \equiv 1 \pmod{p}$; por esta razón, en virtud de **c**, § **4**, cap. **IV**, se tiene, $p - 1 \leqslant \tau$. Pero (**d**, § **1**) τ es un divisor del número $p - 1$. Por lo tanto, $\tau = p - 1$ y g es una raíz primitiva.

e. *Sea g una raíz primitiva respecto del módulo p. Se puede señalar un número t de modo que el número u que se determina por la igualdad $(g + pt)^{p-1} = 1 + pu$ no sea divisible por p. El número correspondiente $g + pt$ es una raíz primitiva respecto del módulo p^α para cualquier $\alpha > 1$.*

En efecto, se tiene

$$g^{p-1} = 1 + pT_0,$$
$$(g + pt)^{p-1} = 1 + p(T_0 - g^{p-2}t + pT) = 1 + pu, \qquad (2)$$

donde u, simultáneamente con t, recorre el sistema completo de restos respecto del módulo p. Por lo tanto, se puede indicar un número t de modo que u no sea divisible por p. Para tal valor t, de (2) se deduce también que

$$\left.\begin{aligned} (g + pt)^{p(p-1)} &= (1 + pu)^p = 1 + p^2u_2, \\ (g + pt)^{p^2(p-1)} &= (1 + p^2u_2)^p = 1 + p^3u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

donde $u_2, u_3, \ldots$ no son divisibles por p.

Supongamos que $g + pt$ pertenece al exponente δ respecto del módulo p^α Entonces

$$(g+pt)^\delta \equiv 1 \text{ (mód. } p^\alpha). \tag{4}$$

De aquí que $(g + pt)^\delta \equiv 1$ (mód. p); por consiguiente, δ es un múltiplo de $p - 1$, y como δ divide a $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p - 1)$ se tiene que $\delta = p^{r-1}(p - 1)$, donde r es uno de los números $1, 2, \ldots, \alpha$. Sustituyendo el primer miembro de la congruencia (4) por su expresión de la igualdad correspondiente de (2) y (3), resulta ($u = u_1$):

$$1+p^r u_r \equiv 1 \text{ (mód. } p^\alpha), \quad p^r \equiv 0 \text{ (mód. } p^\alpha), \quad r=\alpha, \quad \delta=\varphi(p^\alpha),$$

es decir, $g + pt$ es una raíz primitiva respecto del módulo p^α.

f. *Sea g_1 una raíz primitiva respecto del módulo p^α, donde $\alpha \geqslant 1$. Entonces, el impar entre los números g_1 y $g_1 + p^\alpha$, es una raíz primitiva respecto del módulo $2p^\alpha$.*

En efecto, es obvio que cualquier número impar x que satisfaga a una de las congruencias $x^\gamma \equiv 1$ (mód. p^α) y $x^\gamma \equiv 1$ (mód. $2p^\alpha$) satisface también a la otra. Por lo tanto, como $\varphi(p^\alpha) = \varphi(2p^\alpha)$, cualquier impar x que sea una raíz primitiva respecto de uno de los módulos p^α y $2p^\alpha$ es también una raíz primitiva respecto del otro. Pero, entre las dos raíces primitivas g_1 y $g_1 + p^\alpha$ respecto del módulo p^α, una de ellas es, inevitableménte, impar, por consiguiente, ésta será también una raíz primitiva respecto del módulo $2p^\alpha$.

§ 3. Búsqueda de las raíces primitivas respecto de los módulos p^α y $2p^\alpha$

Las raíces primitivas respecto de los módulos p^α y $2p^\alpha$, donde p es un número primo impar y $\alpha \geqslant 1$, pueden buscarse aplicando el siguiente teorema general: *Sea $c = \varphi(m)$ y sean $q_1, q_2, \ldots, q_k$ los divisores primos distintos del número c. Para que un número g, que es primo con m, sea una raíz primitiva respecto del módulo m, es necesario y suficiente que este número g no satisfaga a nin-*

guna de las congruencias.

$$g^{\frac{c}{q_1}} \equiv 1 \ (\text{mód. } m), \ g^{\frac{c}{q_2}} \equiv 1 \ (\text{mód. } m), \ \ldots,$$
$$\ldots, g^{\frac{c}{q_k}} \equiv 1 \ (\text{mód. } m). \qquad (1)$$

En efecto, si g es una raíz primitiva, éste pertenece al exponente c y., por consiguiente, no puede satisfacer a ninguna de las congruencias (1).

Recíprocamente, supongamos que g no satisface a ninguna de las congruencias (1). Si el exponente δ, al cual pertenece g, fuese menor que c, entonces, designando con la letra q alguno de los divisores primos de $\frac{c}{\delta}$, tendríamos que $\frac{c}{\delta} = qu$, $\frac{c}{q} = \delta u$, $g^{\frac{c}{q}} \equiv 1$ (mód. p), lo cual contradice a la hipótesis hecha. Por lo tanto, $\delta = c$ y g es una raíz primitiva.

Ejemplo 1. Sea $m = 41$. Se tiene $\varphi(41) = 40 = 2^3 \cdot 5$, $\frac{40}{5} = 8$, $\frac{40}{2} = 20$. Por consiguiente, para que un número g, no divisible por 41, sea una raíz primitiva respecto del módulo 41, es necesario y suficiente que este número g no satisfaga a ninguna de las congruencias

$$g^8 \equiv 1 \ (\text{mód. } 41), \ g^{20} \equiv 1 \ (\text{mód. } 41). \qquad (2)$$

Ensayando los números 2, 3, 4, . . ., hallamos (respecto del módulo 41):

$$2^8 \equiv 10, \quad 3^8 \equiv 1, \quad 4^8 \equiv 18, \quad 5^8 \equiv 18, \quad 6^8 \equiv 10,$$
$$2^{20} \equiv 1, \qquad\qquad 4^{20} \equiv 1, \quad 5^{20} \equiv 1, \quad 6^{20} \equiv 40.$$

Vemos, pues, que los números 2, 3, 4, 5 no son raíces primitivas, puesto que cada uno de ellos satisface al menos a una de las congruencias (2). El número 6 es una raíz primitiva, pues no satisface a ninguna de las congruencias (2).

Ejemplo 2. Sea $m = 1\,681 = 41^2$. En este caso también se podría buscar una raíz primitiva aplicando el teorema general. Sin embargo, la hallaremos más fácilmente aplicando el

teorema **e**, § **2**. Teniendo en cuenta (ejemplo 1) que el número 6 es una raíz primitiva respecto del módulo 41, hallamos:

$$6^{40} = 1 + 41\,(3 + 41l),$$

$$(6 + 41t)^{40} = 1 + 41\,(3 + 41l - 6^{39}t + 41T) = 1 + 41u.$$

Para que u no sea divisible por 41, es suficiente tomar $t = 0$. Por ello, se puede tomar por raíz primitiva respecto del módulo 1 681 el número $6 + 41 \cdot 0 = 6$.

Ejemplo 3. Sea $m = 3\,362 = 2 \cdot 1\,681$. En este caso también se podría buscar una raíz primitiva aplicando el teorema general. Sin embargo, la hallaremos más fácilmente aplicando el teorema **f**, § **2**. Teniendo en cuenta (ejemplo 2) que el número 6 es una raíz primitiva respecto del módulo 1 681, se puede tomar por raíz primitiva respecto del módulo 3 362 el número impar entre los números 6, 6 + 1 681, o sea, el número 1 687.

§ 4. Indices respecto de los módulos p^{α} y $2p^{\alpha}$

a. Supongamos que p es un número primo impar, $\alpha \geqslant 1$; m es uno de los números p^{α} y $2p^{\alpha}$; $c = \varphi(m)$, g es una raíz primitiva respecto del módulo m.

b. *Si γ recorre los restos no negativos mínimos $\gamma = 0, 1, \ldots, c - 1$ respecto del módulo c, entonces g^{γ} recorre el sistema reducido de restos respecto del módulo m.*

En efecto, g^{γ} recorre c números que son primos con m y que, en virtud de **b**, § **1**, no son congruentes entre sí respecto del módulo m.

c. Para los números a que son primos con m introduciremos el concepto de índice, el cual representa una analogía del concepto de logaritmo; en este caso, la raíz primitiva desempeña un papel similar al de la base de los logaritmos.

Si

$$a \equiv g^{\gamma} \pmod{m}$$

(se supone que $\gamma \geqslant 0$), el número γ se llama *índice del número a, respecto del módulo m, de base g* y se designa con la notación $\gamma = \text{ind}\, a$ (más exactamente $\gamma = \text{ing}_g\, a$).

En virtud de **b**, todo a que sea primo con m admite un índice único γ' entre los números de la sucesión

$$\gamma = 0, 1, \ldots, c - 1.$$

Una vez conocido γ', se pueden señalar también todos los índices del número a; según **c**, § **1**, éstos serán todos los números no negativos de la clase

$$\gamma \equiv \gamma' \pmod{c}.$$

De la definición de índice dada se deduce inmediatamente que los números que poseen un índice dado γ forman una clase de números respecto del módulo m.

d. *Se tiene*

$$\text{ind}\, ab \ldots l \equiv \text{ind}\, a + \text{ind}\, b + \ldots + \text{ind}\, l \pmod{c}$$

y, en particular,

$$\text{ind}\, a^n \equiv n\ \text{ind}\, a \pmod{c}.$$

En efecto,

$$a \equiv g^{\text{ind}\, a} \pmod{m}, \quad b \equiv g^{\text{ind}\, b} \pmod{m}, \ldots$$
$$\ldots, l \equiv g^{\text{ind}\, l} \pmod{m},$$

de donde, multiplicando, hallamos

$$ab \ldots l \equiv g^{\text{ind}\, a + \text{ind}\, b + \ldots + \text{ind}\, l} \pmod{m}.$$

Por consiguiente, $\text{ind}\, a + \text{ind}\, b + \ldots + \text{ind}\, l$ es uno de los índices del producto $ab \ldots l$.

e.. Debido a las aplicaciones prácticas de los índices, para cada módulo p (claro, no muy grande) se han compuesto *tablas de índices*. Estas son dos: una para hallar el índice de un número dado, otra para hallar los números por el índice. Las tablas contienen los restos no negativos mínimos de los números (el sistema reducido) y sus índices mínimos (el sistema completo) respecto de los módulos p y $c = \varphi(p) = p - 1$, respectivamente.

Ejemplo. Formemos las tablas indicadas para el módulo $p =$ $= 41$. Anteriormente se demostró (ejemplo 1, § 3) que el número $g = 6$ es una raíz primitiva respecto del módulo 41; tomémoslo por base de los índices. Hallamos (las congruencias se toman respecto del módulo 41):

$6^0 \equiv 1$	$6^8 \equiv 10$	$6^{16} \equiv 18$	$6^{24} \equiv 16$	$6^{32} \equiv 37$
$6^1 \equiv 6$	$6^9 \equiv 19$	$6^{17} \equiv 26$	$6^{25} \equiv 14$	$6^{33} \equiv 17$
$6^2 \equiv 36$	$6^{10} \equiv 32$	$6^{18} \equiv 33$	$6^{26} \equiv 2$	$6^{34} \equiv 20$
$6^3 \equiv 11$	$6^{11} \equiv 28$	$6^{19} \equiv 34$	$6^{27} \equiv 12$	$6^{35} \equiv 38$
$6^4 \equiv 25$	$6^{12} \equiv 4$	$6^{20} \equiv 40$	$6^{28} \equiv 31$	$6^{36} \equiv 23$
$6^5 \equiv 27$	$6^{13} \equiv 24$	$6^{21} \equiv 35$	$6^{29} \equiv 22$	$6^{37} \equiv 15$
$6^6 \equiv 39$	$6^{14} \equiv 21$	$6^{22} \equiv 5$	$6^{30} \equiv 9$	$6^{38} \equiv 8$
$6^7 \equiv 29$	$6^{15} \equiv 3$	$6^{23} \equiv 30$	$6^{31} \equiv 13$	$6^{39} \equiv 7$,

por lo tanto, las tablas indicadas son:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	26	15	12	22	1	39	38	30
1	8	3	27	31	25	37	24	33	16	9
2	34	14	29	36	13	4	17	5	11	7
3	23	28	10	18	19	21	2	32	35	6
4	20									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	6	36	11	25	27	39	29	10	19
1	32	28	4	24	21	3	18	26	33	34
2	40	35	5	30	16	14	2	12	31	22
3	9	13	37	17	20	38	23	15	8	7

Aquí el número de la fila denota las decenas y el número de la columna denota las unidades del número (del índice). En la casilla que es común para la fila y columna indicadas viene colocado el índice (el número) correspondiente.

Por ejemplo, el ind 25 se halla en la casilla de la primera tabla que es común a la fila que posee el número 2 y a la columna que posee el número 5, es decir, ind $25 = 4$. El número cuyo índice es 33 se halla en la casilla de la segunda tabla que es común a la fila que posee el número 3 y a la columna que posee el número 3, es decir, $33 =$ ind 17.

§ 5. *Consecuencias de la teoría antecedente*

a. Supongamos que p es un número primo impar; $\alpha \geqslant 1$, m es uno de los números p^α, $2p^\alpha$, y, finalmente, $c = \varphi(m)$.

b. *Sea* $(n, c) = d$; *entonces*:

1. *La congruencia*

$$x^n \equiv a \ (\text{mód. } m) \qquad (1)$$

admite solución (*y, por consiguiente, a es un resto de grado n respecto del módulo m*) *cuando, y sólo cuando,* ind *a es un múltiplo de d.*

Si la congruencia (1) *es resoluble, ésta admite d soluciones.*

2. *En el sistema reducido de restos respecto del módulo m, el número de restos de grado n es igual a* $\frac{c}{d}$.

En efecto, la congruencia (1) es equivalente a la siguiente:

$$n \text{ ind } x \equiv \text{ind } a \ (\text{mód. } c), \qquad (2)$$

la cual admite solución cuando, y sólo cuando, ind a es un múltiplo de d (**d**, § **2**, cap **IV**).

Si la congruencia (2) admite solución, para el ind x se obtienen d valores incongruentes respecto del módulo c; a éstos les corresponden d valores de x que son incongruentes respecto del módulo m.

Por lo tanto, la afirmación **1** es cierta.

Entre los números $0, 1, \ldots, c - 1$, los cuales son los índices mínimos de los restos del sistema reducido respecto del módulo m, hay $\frac{c}{d}$ números que son múltiplos de d. Por lo tanto, la afirmación **2** es cierta.

Ejemplo 1. Para la congruencia

$$x^8 \equiv 23 \ (\text{mód. } 41) \qquad (3)$$

se tiene $(8, 40) = 8$, y como ind $23 = 36$ no es divisible por 8, la congruencia (3) es irresoluble.

Ejemplo 2. Para la congruencia

$$x^{12} \equiv 37 \ (\text{mód. } 41) \qquad (4)$$

se tiene (12, 40) = 4, y ind 37 = 32 es divisible por 4. Por lo tanto, la congruencia (4) es resoluble y admite 4 soluciones. Las soluciones indicadas se hallan del modo siguiente.

La congruencia (4) es equivalente a las siguientes:

$$12 \text{ ind } x \equiv 32 \text{ (mód. } 40), \quad \text{ind } x \equiv 6 \text{ (mód. } 10).$$

De aquí, para el ind x se hallan 4 valores incongruentes respecto del módulo 40:

$$\text{ind } x = 6, 16, 26, 36,$$

correspondientemente a lo cual se hallan 4 soluciones de la congruencia (4):

$$x \equiv 39; 18; 2; 23 \text{ (mód. } 41).$$

Ejemplo 3. Los números

$$1, 4, 10, 16, 18, 23, 25, 31, 37, 40, \tag{5}$$

cuyos índices son múltiplos de 4, son todos los restos bicuadráticos (o también todos los restos de cualquier grado $n = 12$, 28, 36, . . ., donde $(n, 40) = 4$), que hay entre los restos positivos mínimos respecto del módulo 41. La cantidad de números en la sucesión (5) es igual a $10 = \frac{40}{4}$.

c. Junto con el aserto **b, 1** es útil el siguiente:

El número a es un resto de grado n respecto del módulo m cuando, y sólo cuando,

$$a^{\frac{c}{d}} \equiv 1 \text{ (mód. } m). \tag{6}$$

En efecto, la condición ind $a \equiv 0$ (mód. d) es equivalente a la siguiente: $\frac{c}{d}$ ind $a \equiv 0$ (mód. c). Por su parte, esta última es equivalente a la condición (6).

Ejemplo. En el teorema del **§ 3,** la imposibilidad de la congruencia $g^{\frac{c}{q}} \equiv 1$ (mód. m) es equivalente a la condición de que g sea un no-resto de grado q respecto del módulo m.

En particular, la imposibilidad de la congruencia $g^{\frac{c}{2}} \equiv$ $\equiv 1$ (mód. m) es equivalente a la condición de que g sea un no-resto cuadrático respecto del módulo m (compárese con **e**, § **1**, cap. **V**).

d. 1. *El exponente* δ, *al cual pertenece a respecto del módulo m, se determina por la igualdad* (ind. a, c) $= \frac{c}{\delta}$; *en particular, la pertenencia de a al conjunto de raíces primitivas respecto del módulo m se determina por la igualdad* (ind a, c) $= 1$.

2. *En el sistema reducido de restos respecto del módulo m, la cantidad de números que pertenecen al exponente* δ *es igual a* $\varphi(\delta)$; *en particular, la cantidad de raíces primitivas es igual a* $\varphi(c)$.

En efecto, δ es el divisor mínimo de c que satisface a la condición $a^{\delta} \equiv 1$ (mód. m). Esta condición es equivalente a

$$\delta \operatorname{ind} a \equiv 0 \ (\text{mód. } c),$$

o sea,

$$\operatorname{ind} a \equiv 0 \left(\text{mód. } \frac{c}{\delta}\right).$$

Por lo tanto, δ es el divisor menor de c para el cual $\frac{c}{\delta}$ divide a ind a, de donde $\frac{c}{\delta}$ es el divisor mayor de c que divide a ind a, es decir, $\frac{c}{\delta} = (\operatorname{ind} a, c)$. Por lo tanto, la afirmación **1** es cierta.

Entre los números $0, 1, \ldots, c-1$, los cuales son los índices mínimos de los restos del sistema reducido respecto del módulo m, son múltiplos de $\frac{c}{\delta}$ los números de la forma $\frac{c}{\delta} y$, donde $y = 0, 1, \ldots, \delta - 1$. La condición $\left(\frac{c}{\delta} y, c\right) = \frac{c}{\delta}$ equivale a que sea $(y, \delta) = 1$; a esta última condición satisfacen $\varphi(\delta)$ valores de y. Por lo tanto, la afirmación **2** es cierta.

Ejemplo 1. En el sistema reducido de restos respecto del módulo 41, los números que pertenecen al exponente 10 son aquellos números a que satisfacen a la condición $(\text{ind } a, 40) = \frac{40}{10} = 4$, es decir, son los números

$$4,\ 23,\ 25,\ 31.$$

En total se tienen $4 = \varphi(10)$ números.

Ejemplo 2. En el sistema reducido de restos respecto del módulo 41 son raíces primitivas los números a que satisfacen a la condición $(\text{ind } a, 40) = 1$, es decir, los números
6, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 22, 24, 26, 28, 29, 30, 34, 35.
En total se tienen $16 = \varphi(40)$ raíces primitivas.

§ 6. Indices respecto del módulo 2^{α}

a. Para el módulo 2^{α} la teoría precedente se sustituye por otra un poco más complicada.

b. Sea $\alpha = 1$. Entonces $2^{\alpha} = 2$. Se tiene $\varphi(2) = 1$. Es una raíz primitiva respecto del módulo 2, por ejemplo, $1 \equiv -1 \pmod{2}$. El número $1^0 = (-1)^0 = 1$ forma el sistema reducido de restos respecto del módulo 2.

c. Sea $\alpha = 2$. Entonces $2^{\alpha} = 4$. Se tiene $\varphi(4) = 2$. Es una raíz primitiva respecto del módulo 4, por ejemplo, $3 \equiv -1 \pmod{4}$. Los números $(-1)^0 = 1$, $(-1)^1 \equiv 3 \pmod{4}$ forman el sistema reducido de restos respecto del módulo 4.

d. Sea $\alpha \geqslant 3$. Entonces $2^{\alpha} \geqslant 8$. Se tiene $\varphi(2^{\alpha}) = 2^{\alpha-1}$ Fácilmente se observa que en este caso no hay raíces primitivas; más exactamente: el exponente al que pertenece un número impar x respecto del módulo 2^{α} no es superior a $2^{\alpha-2} = \frac{1}{2}\varphi(2^{\alpha})$. En efecto, se tiene

$$x^2 = 1 + 8t_1,$$
$$x^4 = 1 + 16t_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{2^{\alpha-2}} = 1 + 2^{\alpha}t_{\alpha-2} \equiv 1 \pmod{2^{\alpha}}.$$

Ahora bien, existen números que pertenecen al exponente $2^{\alpha-2}$. Tal es, por ejemplo, el número 5. En efecto,

$$5 = 1+4,$$
$$5^2 = 1+8+16,$$
$$5^4 = 1+16+32u_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$5^{2^{\alpha-3}} = 1+2^{\alpha-1}+2^{\alpha}u_{\alpha-3},$$

de donde se ve que ninguna de las potencias 5^1, 5^2, 5^4, $\ldots$, $5^{2^{\alpha-3}}$ es congruente con 1 respecto del módulo 2^{α}. Fácilmente se observa que los números de las dos filas siguientes:

$$5^0, \quad 5^1, \ldots, \quad 5^{2^{\alpha-2}-1},$$
$$-5^0, \quad -5^1, \ldots, \quad -5^{2^{\alpha-2}-1}$$

forman el sistema reducido de restos respecto del módulo 2^{α}. En efecto, en total se tienen $2\cdot 2^{\alpha-2} = \varphi(2^{\alpha})$ números; los números de cada fila por separado son incongruentes entre sí respecto del módulo 2^{α} (**b**, § **1**); finalmente, los números de la fila superior son incongruentes con los de la inferior, puesto que, respecto del módulo 4, los primeros son congruentes con 1 mientras que los segundos son congruentes con —1.

e. Para mayor comodidad en las investigaciones posteriores expresaremos los resultados **b**, **c**, **d** en una forma más uniforme, la cual valdrá también para el caso $\alpha = 0$.

Sea

$$c=1,\ c_0=1, \quad si\ \alpha=0, \quad o\ si\ \alpha=1;$$
$$c=2,\ c_0=2^{\alpha-2}, \quad si\ \alpha\geqslant 2,$$

(por lo tanto, siempre $cc_0=\varphi(2^{\alpha})$) y supongamos que γ y γ_0 recorren, independientemente uno del otro, los restos mínimos no negativos

$$\gamma=0, \ldots, c-1; \quad \gamma_0=0, \ldots, c_0-1$$

respecto de los módulos c y c_0. Entonces $(-1)^{\gamma}\, 5^{\gamma_0}$ recorre el sistema reducido de restos respecto del módulo 2^{α}.

f. *La congruencia*

$$(-1)^{\gamma}\, 5^{\gamma_0} \equiv (-1)^{\gamma'}\, 5^{\gamma'_0} \pmod{2^\alpha} \qquad (1)$$

se verifica cuando, y sólo cuando

$$\gamma \equiv \gamma' \pmod{c} \qquad \gamma_0 \equiv \gamma'_0 \pmod{c_0}.$$

En efecto, para $\alpha = 0$ el teorema es obvio. Por lo tanto, supongamos que $\alpha > 0$. Sean r y r_0 los restos mínimos no negativos respecto de los módulos c y c_0 para los números γ y γ_0, y sean r' y r'_0 los restos correspondientes para los números γ' y γ'_0. En virtud de **c**, § **1** (-1 pertenece al exponente c mientras que 5 pertenece al exponente c_0), se verifica la congruencia (1) cuando, y sólo cuando, $(-1)^r\, 5^{r_0} \equiv$ $\equiv (-1)^{r'}\, 5^{r'_0} \pmod{2^\alpha}$, es decir, (en virtud de **e**) cuando $r = r'$, $r_0 = r'_0$.

g. Si

$$a \equiv (-1)^{\gamma}\, 5^{\gamma_0} \pmod{2^\alpha},$$

el sistema γ, γ_0 se llama *sistema de índices del número a respecto del módulo* 2^α.

En virtud de **e**, todo a que sea primo con 2^α (o sea, impar) admite un sistema único de índices γ', γ'_0 entre los $cc_0 =$ $= \varphi(2^\alpha)$ pares de valores γ, γ_0 indicados en **e**.

Conociendo el sistema γ', γ'_0 se pueden indicar también todos los sistemas de índices del número a; según **f**, éstos serán todos los pares γ, γ_0 formados por las clases de números no negativos

$$\gamma \equiv \gamma' \pmod{c},\ \gamma_0 \equiv \gamma'_0 \pmod{c_0}.$$

De la definición dada de sistema de índices se deduce inmediatamente que los números que poseen un sistema de índices dado γ, γ_0 forman una clase de números respecto del módulo 2^α.

h. *Los índices del producto son congruentes con las sumas de los índices de los factores respecto de los módulos c y* c_0.

En efecto, sean $\gamma(a)$, $\gamma_0(a)$; . . .; $\gamma(l)$, $\gamma_0(l)$ los sistemas de

índices de los números $a, \ldots, l$. Se tiene

$$a \ldots l \equiv (-1)^{\gamma(a)+\ldots+\gamma(l)}\, 5^{\gamma_0(a)+\ldots+\gamma_0(l)}.$$

Por consiguiente, $\gamma(a)+\ldots+\gamma(l)$, $\gamma_0(a)+\ldots+\gamma_0(l)$ son los índices del producto $a \ldots l$.

§ 7. Indices respecto de cualquier módulo compuesto

a. Sea $m = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ la descomposición canónica del número m. Supongamos que c y c_0 denotan los valores indicados en **e**, § **6**; $c_s = \varphi(p_s^{\alpha_s})$; g_s es la raíz primitiva mínima respecto del módulo p^{α_s}.

b. Si

$$\left.\begin{aligned} &a \equiv (-1)^{\gamma} 5^{\gamma_0} \,(\text{mód. } 2^{\alpha}),\\ &a \equiv g_1^{\gamma_1} \,(\text{mód. } p_1^{\alpha_1}),\ \ldots,\ a \equiv g_k^{\gamma_k} \,(\text{mód. } p_k^{\alpha_k}). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

el sistema $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ se llama *sistema de índices del número a respecto del módulo m.*

De esta definición se deduce que γ, γ_0 es el sistema de índices del número a respecto del módulo 2^{α} y $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ son los índices del número a respecto de los módulos $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$. Por ello (**g**, § **6**; **c**, § **4**), todo a que es primo con m (y que, por consiguiente, es primo con todos los números $2^{\alpha}, p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$) admite un sistema único de índices $\gamma', \gamma_0', \gamma_1', \ldots, \gamma_k'$ entre los $cc_0c_1 \ldots c_k = \varphi(m)$ sistemas $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ que se obtienen cuando $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ recorren, independientemente uno de otro, los restos mínimos no negativos respecto de los módulos $c, c_0, c_1, \ldots, c_k$. Formando todos los sistemas $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$, compuestos por los números no negativos de las clases

$$\gamma \equiv \gamma_1' \,(\text{mód. } c), \quad \gamma_0 \equiv \gamma_0' \,(\text{mód. } c_0),$$
$$\gamma_1 \equiv \gamma_1' \,(\text{mód. } c_1),\ \ldots,\ \gamma_k \equiv \gamma_k' \,(\text{mód. } c_k).$$

se obtienen todos los sistemas de índices del número a.

Los números a que poseen un sistema dado de índices $\gamma, \gamma_0,$

$\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ pueden hallarse resolviendo el sistema (1) y, por consiguiente (**b**, § **3**, cap. **IV**), forman una clase de números respecto del módulo m.

c. Como los índices $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ del número a respecto del módulo m son los índices del mismo respecto de los módulos 2^α, $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$, respectivamente, subsiste el teorema:

Los índices del producto son congruentes respecto de los módulos $c, c_0, c_1, \ldots, c_k$ con las sumas de los índices de los factores.

d. Sea $\tau = \varphi(2^\alpha)$ si $\alpha \leqslant 2$ y $\tau = \frac{1}{2}\varphi(2^\alpha)$ si $\alpha > 2$ y designemos con h el mínimo común múltiplo de los números $\tau, c_1, \ldots, c_k$. Para cualquier a que sea primo con m, se cumple la congruencia $a^h \equiv 1$ respecto de todos los módulos 2^α, $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$, por lo cual, también se cumple esta congruencia respecto del módulo m. Por lo tanto, a no puede ser una raíz primitiva respecto del módulo m si $h < \varphi(m)$. Pero esto último ocurre cuando $\alpha > 2$ siendo $k > 1$, y también cuando $\alpha = 2$, $k = 1$. Por consiguiente, para $m > 1$ pueden existir raíces primitivas solamente en los casos $m = 2, 4, p_1^{\alpha_1}, 2p_1^{\alpha_1}$. Pero precisamente en estos casos fue demostrada anteriormente (§ **6**, § **2**) la existencia de raíces primitivas. En resumen, *todos los casos en que existen raíces primitivas respecto de un módulo m, superior a 1, son*

$$m = 2,\ 4,\ p^\alpha,\ 2p^\alpha.$$

Preguntas referentes al capítulo VI

A continuación, la letra p siempre denota un número primo impar, y en la pregunta **11**, **b**, también el número 2.

1, a. Sea a un número entero, $a > 1$. Demostrar que los divisores primos impares del número $a^p - 1$ dividen a $a - 1$ o son de la forma $2px + 1$.

b. Sea a un número entero, $a > 1$. Demostrar que los divisores primos impares del número $a^p + 1$ dividen a $a + 1$ o son de la forma $2px + 1$.
c. Demostrar que hay una cantidad infinita de números primos de la forma $2px + 1$.
d. Sea n un número entero, $n > 0$. Demostrar que los divisores primos del número $2^{2^n} + 1$ son de la forma $2^{n+1}x + 1$.
2. Sea a un número entero, $a > 1$, y sea n un número entero, $n > 0$. Demostrar que $\varphi(a^n - 1)$ es un múltiplo de n.
3, a. Sea n un número entero, $n > 1$. Con los números 1, 2, . . ., n, siendo n impar, formemos las permutaciones

$$1, 3, 5, \ldots, n-2, n, n-1, n-3, \ldots, 4, 2;$$
$$1, 5, 9, \ldots, 7, 3,$$

etc. y siendo n par, formemos las permutaciones

$$1, 3, 5, \ldots, n-1, n, n-2, \ldots, 4, 2;$$
$$1, 5, 9, \ldots, 7, 3,$$

etc. Demostrar que la k-ésima operación da la sucesión inicial cuando, y sólo cuando, $2^k \equiv \pm 1 \pmod{2n-1}$.
b. Sean n y m dos números enteros, $n > 1$, $m > 1$. Contemos los números 1, 2, . . ., n en orden directo desde 1 hasta n, después en orden inverso desde n hasta 2, luego de nuevo en orden directo desde 1 hasta n, después otra vez en orden inverso desde n hasta 2, etc. En este cálculo, escribamos los números: el 1°, el $(m+1)$-ésimo, el $(2m+1)$-ésimo, etc., hasta que se obtengan n números. Repitamos la misma operación con la nueva sucesión de n números, etc. Demostrar que la k-ésima operación de la sucesión inicial cuando, y sólo cuando,

$$m^k \equiv \pm 1 \pmod{2n-1}.$$

4. Demostrar la existencia de $\varphi(\delta)$ números pertenecientes al exponente δ, considerando para ello la congruencia $x^\delta \equiv 1 \pmod{p}$ (pregunta **10**, **c**, cap. **IV**) y aplicando **d**, **§ 3**, cap. **II**.

5, a. Demostrar que el número 3 es una raíz primitiva de los números primos de la forma $2^n + 1$, $n > 1$.
b. Demostrar que el número 2 ó —2 es una raíz primitiva de los números primos de la forma $2p + 1$, según que el número p sea de la forma $4n + 1$ o de la forma $4n + 3$.
c. Demostrar que el número 2 es una raíz primitiva de los números primos de la forma $4p + 1$.
d. Demostrar que el número 3 es una raíz primitiva de los números primos de la forma

$$2^n p + 1, \quad \text{si} \quad n > 1 \quad \text{y} \quad p > \frac{3^{2^{n-1}}}{2^n}.$$

6, a. α) Sea n entero, $n \geqslant 0$, $S_n = 1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n$. Demostrar que

$$S_n \equiv -1 \ (\text{mód. } p), \text{ si } n \text{ es un múltiplo de } p-1,$$
$$S_n \equiv 0 \ (\text{mód. } p) \quad \text{en caso contrario.}$$

β) Conservando las notaciones de la pregunta **9, c,** cap. **V,** demostrar que

$$S(1) \equiv -\left(\begin{array}{c}\frac{p-1}{2} \\ \frac{p-1}{4}\end{array}\right) (\text{mód. } p).$$

b. Demostrar el teorema de Wilson aplicando **b, § 4.**
7. Supongamos que g y g_1 son raíces primitivas respecto del módulo p, y que $\alpha \operatorname{ind}_g g_1 \equiv 1$ (mód. $p - 1$).
a. Sea $(a, p) = 1$. Demostrar que

$$\operatorname{ind}_{g_1} a \equiv \alpha \operatorname{ind}_g a \ (\text{mód. } p-1).$$

b. Sea n un divisor de $p - 1$, $1 < n < p - 1$. Los números que son primos con p pueden dividirse en n clases, refiriendo a la s-ésima clase ($s = 0, 1, \ldots, n - 1$) los números que satisfacen a la condición $\operatorname{ind} a \equiv s$ (mód. n). Demostrar que la clase de orden s según la base g es equivalente a la clase de orden s_1 según la base g_1, donde $s_1 \equiv \alpha s$ (mód. n).
8. Señalar el método más simple posible de resolución de la congruencia $x^n \equiv a$ (mód. p) (que sea cómodo si $(n, p - 1)$ no

es muy grande) en el caso en que se conoce una raíz primitiva g respecto del módulo p.

9. Supongamos que $m, a, c, c_0, c_1, \ldots, c_k, \gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ denotan los valores indicados en el § 7. Tomando cualesquiera raíces $R, R_0, R_1, \ldots, R_k$ de las ecuaciones

$$R^c = 1, \quad R_0^{c_0} = 1, \quad R_1^{c_1} = 1, \ \ldots, \ R_k^{c_k} = 1.$$

hacemos

$$\chi(a) = R^{\gamma} R_0^{\gamma_0} R_1^{\gamma_1}, \ \ldots, \ R_k^{\gamma_k}.$$

Si $(a, m) > 1$, hacemos $\chi(a) = 0$.

La función definida de este modo para todos los valores enteros de a, la llamaremos *carácter* respecto del módulo m. Si $R = R_0 = R_1 = \ldots, = R_k = 1$, al carácter lo llamaremos *principal*; éste admite el valor 1 si $(a, m) = 1$ y el valor 0 si $(a, m) > 1$.

a. Demostrar que del modo indicado se obtienen $\varphi(m)$ caracteres distintos (dos caracteres se llaman distintos, si al menos para un valor de a éstos no son iguales entre sí).

b. Deducir las propiedades siguientes de los caracteres:

α) $\chi(1) = 1$,

β) $\chi(a_1 a_2) = \chi(a_1)\chi(a_2)$,

γ) $\chi(a_1) = \chi(a_2)$, si $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$.

c. Demostrar que

$$\sum_{a=0}^{m-1} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(m) & \text{para el carácter principal,} \\ 0 & \text{para los demás caracteres.} \end{cases}$$

d. Demostrar que, sumando para un valor de a dado respecto de todos los $\varphi(m)$ caracteres, se tiene

$$\sum_{\chi} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(m), & \text{si } a \equiv 1 \pmod{m}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

e. Considerando la suma

$$H = \sum_{\chi} \sum_{a} \frac{\chi(a)}{\psi(a)}$$

donde a recorre el sistema reducido de restos respecto del módulo m, demostrar que la función $\psi(a)$, definida para todos los valores enteros de a y que satisface a las condiciones:

$$\psi(a)=0, \text{ si } (a, m)>1,$$
$$\psi(a) \text{ no es idénticamente igual a } 0,$$
$$\psi(a_1a_2)=\psi(a_1)\psi(a_2),$$
$$\varphi(a_1)=\psi(a_2), \text{ si } a_1\equiv a_2 \pmod{m},$$

es un carácter.

f. Demostrar los teoremas siguientes:

α) Si $\chi_1(a)$ y $\chi_2(a)$ son dos caracteres, entonces $\chi_1(a)\chi_2(a)$ también es un carácter.

β) Si $\chi_1(a)$ es un carácter y $\chi(a)$ recorre todos los caracteres, entonces $\chi_1(a)\chi(a)$ también recorre todos los caracteres.

γ) Si $(l, m)=1$, se tiene

$$\sum_{\chi}\frac{\chi(a)}{\chi(l)}=\begin{cases}\varphi(m), & \text{si } a\equiv 1 \pmod{m}\\ 0 & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

10, a. Sea n divisor de $p-1$, $1<n\leqslant p-1$, y l un entero que no sea divisible por n. El número $R_1=e^{2\pi i\frac{l}{n}}$ es una raíz de la ecuación $R_1^n=1$ y, por consiguiente, la potencia $e^{2\pi i\frac{l\operatorname{ind}x}{n}}$, a la cual hay que asignarle el valor 0 cuando x es un múltiplo de p, es un carácter respecto del módulo p.

α) Demostrar que si $(k, p)=1$, se tiene

$$\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{l\operatorname{ind}(x+k)-l\operatorname{ind}x}{n}}=-1.$$

β) Sea Q entero, $1<Q<p$,

$$S=\sum_{x=0}^{p-1}|S_{l,n,x}|^2;\quad S_{l,n,x}=\sum_{z=0}^{Q-1} e^{2\pi i\frac{l\operatorname{ind}(x+z)}{n}}.$$

Demostrar que $S=(p-Q)Q$.

11, a. Supongamos que a es un entero, n es divisor de $p-1$, $1<n\leqslant p-1$, k es un entero que no es divisible por n,

$$U_{a,p}=\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{k \operatorname{ind} x}{n}} e^{2\pi i \frac{ax}{p}}.$$

α) Siendo $(a, p)=1$, demostrar que $|U_{a,p}|=\sqrt{p}$.

β) Demostrar que

$$e^{2\pi i \frac{-k \operatorname{ind} a}{n}}=\frac{U_{a,p}}{U_{1,p}}.$$

γ) Supongamos que p es de la forma $4m+1$,

$$S=\sum_{x=1}^{p-2} e^{2\pi i \frac{\operatorname{ind}(x^2+x)}{4}}.$$

Demostrar que $p=A^2+B^2$ (compárese con las preguntas **9, a** y **9, c**, cap. **V**), donde A y B son enteros, definidos por la igualdad $S=A+Bi$.

δ) Supongamos que x_s recorre los números del sistema reducido de restos respecto del módulo p que satisfacen a la condición $\operatorname{ind} x_s \equiv s \pmod{n}$. Haciendo

$$S=\sum_{x_s} e^{2\pi i \frac{ax_s}{p}},$$

demostrar que

$$\left|S+\frac{1}{n}\right|<\left(1-\frac{1}{n}\right)\sqrt{p}.$$

b. Sea n entero, $n>2$, $m>1$, $(a, m)=1$,

$$S_{a,m}=\sum_{x} e^{2\pi i \frac{ax^n}{m}}, \quad S'_{a,m}=\sum_{\xi}{}' e^{2\pi i \frac{a\xi^n}{m}},$$

donde x recorre el sistema completo y ξ el sistema reducido de restos respecto del módulo m (compárese con la pregunta **12, d**, cap. **III** y con la pregunta **11, b**, cap. **V**).

α) Sea $\delta=(n,\ p-1)$. Demostrar que

$$|S_{a,\,p}|\leqslant(\delta-1)\sqrt{p}.$$

β) Sea $(n,\ p)=1$ y sea s un entero, $1<s\leqslant n$. Demostrar que

$$S_{a,\,p^s}=p^{s-1},\quad S'_{a,\,p^s}=0.$$

γ) Sea s un entero, $s>n$. Demostrar que

$$S_{a,\,p^s}=p^{n-1}S_{a,\,p^{s-n}},\quad S'_{a,\,p^s}=0.$$

δ) Demostrar que

$$|S_{a,\,m}|<Cm^{1-\frac{1}{n}},$$

donde C depende solamente de n.

12. Sean M y Q enteros, $0\leqslant M<M+Q\leqslant p$.

a. Supongamos que n es un divisor de $p-1$, $1<n<<p-1$, k es un entero, no divisible por n. Demostrar que

$$\left|\sum_{x=M}^{M+Q-1} e^{2\pi i\frac{k\,\mathrm{ind}\,x}{n}}\right|<\sqrt{p}\ln p.$$

b, α) Sea T la cantidad de números de la s-ésima clase de la pregunta 7, **b**, comprendidos entre los números M, $M+1$, ..., $M+Q-1$. Demostrar que

$$T=\frac{Q}{n}+\theta\sqrt{p}\ln p;\quad |\theta|<1.$$

β) Sea N un entero arbitrario y $l_0=[2n\sqrt{p}-1]$. Demostrar que entre los números de la s-ésima clase de la pregunta **7, b** existe al menos uno que es congruente respecto del módulo p con alguno de los números de la sucesión

$$N-l_0,\ \ldots,\ N-1,\ N,\ N+1,\ \ldots,\ N+l_0.$$

c. Supongamos que k denota el número de divisores primos de $p-1$ y que H es el número de raíces primitivas respecto del módulo p, comprendidas entre los números M, $M+1$, ..., $M+Q-1$. Demostrar que

$$H=\frac{\varphi(p-1)}{p-1}Q+\theta 2^k\sqrt{p}\ln p;\quad |\theta|<1.$$

d. Supongamos que M_1 y Q_1 son enteros, $0 \leqslant M_1 < M_1 + Q_1 \leqslant p - 1$, y que J denota la cantidad de números de la sucesión ind M, ind $(M+1)$, . . ., ind $(M+Q-1)$, comprendidos entre los números de la sucesión M_1, $M_1 + 1$, . . ., $M_1 + Q_1 - 1$. Demostrar que

$$J = \frac{QQ_1}{p-1} + \theta \sqrt{p} (\ln p)^2; \quad |\theta| < 1.$$

13. Demostrar la existencia de una constante p_0 que satisface a la condición: si $p > p_0$, n es un divisor de $p-1$, $1 < n < p-1$, entonces, el menor entre los no-restos positivos de grado n respecto del módulo p, es $< h$;

$$h = p^{\frac{1}{c}} (\ln p)^2; \quad c = 2e^{1-\frac{1}{n}}.$$

14, a. Sea $m > 1$, $(a, m) = 1$,

$$S = \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{m-1} \nu(x) \rho(y) e^{2\pi i \frac{axy}{m}};$$

$$\sum_{x=0}^{m-1} |\nu(x)|^2 + X, \quad \sum_{y=0}^{m-1} |\rho(y)|^2 = Y.$$

Demostrar que $|S| \leqslant \sqrt{XYm}$.

b, α) Supongamos que $m > 1$, $(a, m) = 1$, n es un entero, $n > 0$, K es el número de soluciones de la congruencia $x^n \equiv 1 \pmod{m}$,

$$S = \sum_{x=1}^{m-1} \chi(x) e^{2\pi i \frac{ax^n}{m}}.$$

Demostrar que $|S| \leqslant K\sqrt{m}$.

β) Sea ε una constante positiva arbitraria. Siendo n constante, demostrar para el número K de la pregunta α) que $K = O(m^\varepsilon)$.

c. Sean $2, q_2, \ldots, q_k$ los divisores primos distintos del número $p-1$.

α) Supongamos que g recorre las raíces primitivas respecto del módulo p, comprendidas en el sistema reducido de

restos, $(a, p)=1$,

$$S=\sum_{g} e^{2\pi i \frac{ag}{p}}.$$

Demostrar que

$$|S|<\frac{9}{8}\frac{\varphi(p-1)}{p-1}2^k\sqrt{p}.$$

Para la demostración se debe hacer recorrer a s y s' los números que satisfacen a las condiciones respectivas:

$$0\leqslant s<p-1;\quad s\equiv 0\ (\text{mód. } 2);$$

$$s\equiv s_r\ (\text{mód. } q_r),\quad 0\leqslant s_r\leqslant\frac{q_r-1}{2}\qquad (r=2,\ \ldots,\ k),$$

$$0\leqslant s'<p-1;\quad s'\equiv 1\ (\text{mód. } 2);$$

$$s'\equiv s'_r\ (\text{mód. } q_r),\quad 0\leqslant s'_r\leqslant\frac{q_r-1}{2}\qquad (r=2,\ \ldots,\ k),$$

y se debe considerar la suma

$$W=\sum_{t} S_t;\quad S_t=\sum_{s}\sum_{s'} e^{2\pi i \frac{au_t v_t}{p}},\qquad u_t=g_0^{ts},\quad v_t=g_0^{ts'},$$

donde t recorre el sistema reducido de restos respecto del módulo p y g_0 es una de las raíces primitivas.

β) Sean M y Q enteros, $0\leqslant M<M+Q\leqslant p$. Demostrar que la cantidad T de raíces primitivas respecto del módulo p, contenidas en la serie $M,\ M+1,\ \ldots,\ M+Q-1$, se expresa por la fórmula

$$T=\frac{\varphi(p-1)}{p-1}\left(Q+\theta\frac{9}{8}2^k\sqrt{p}\ln p\right);\qquad |\theta|<1.$$

γ) Sea N un número entero y $l_0=\left[\frac{12}{5}2^k\sqrt{p}\right]$. Demostrar que existe una raíz primitiva respecto del módulo p que es congruente con alguno de los números

$$N-l_0,\ \ldots,\ N-1,\ N,\ N+1,\ \ldots,\ N+l_0.$$

15, a. Supongamos que $(a, p)=(b, p)=1$, y sea n un número entero distinto de 1, $|n|=n_1$, $0<n_1<p$,

$$S=\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{ax^n+bx}{p}}.$$

Demostrar que

$$|S|<\frac{3}{2} n_1^{\frac{1}{2}} p^{\frac{3}{4}}.$$

b. Sea $(A, p)=1$ y supongamos que n es un entero, distinto de 1, $|n|=n_1$, $0<n_1<p$, M_0 y Q_0 son enteros, $0 \leqslant M_0<M_0+Q_0 \leqslant p$.

α) Sea

$$S=\sum_{x=M_0}^{M_0+Q_0-1} e^{2\pi i \frac{Ax^n}{p}}.$$

Demostrar que

$$|S|<\frac{3}{2} n_1^{\frac{1}{2}} p^{\frac{3}{4}} \ln p.$$

β) Supongamos que M y Q son enteros, $0 \leqslant M<M+Q \leqslant p$, T es la cantidad de números de la sucesión Ax^n, $x=M_0$, M_0+1, ..., M_0+Q_0-1, que son congruentes respecto del módulo p con los números de la sucesión M, $M+1$, ..., $M+Q-1$.

Demostrar que

$$T=\frac{Q_0 Q}{p}+\theta \frac{3}{2} n_1^{\frac{1}{2}} p^{\frac{3}{4}} (\ln p)^2; \quad |\theta|<1.$$

c. Supongamos que $(a, p)=1$ y sean b y c enteros, $(b^2-4ac, p)=1$.

α) Sea γ un entero,

$$S=\sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{ax^2+bx+c}{p}\right) e^{2\pi i \frac{\gamma x}{p}}.$$

Demostrar que $|S|<\frac{3}{2} p^{\frac{3}{4}}$.

β) Sean M y Q enteros, $0 \leqslant M < M+Q \leqslant p$,

$$S = \sum_{x=M}^{M+Q-1} \left(\frac{ax^2+bx+c}{p}\right).$$

Demostrar que $|S| < \frac{3}{2} p^{\frac{3}{4}} \ln p$.

Ejercicios numéricos referentes al capítulo VI

1, a. Hallar (mediante los cálculos más simples posible) el exponente al cual pertenece el número 7 respecto del módulo 43.
b. Hallar el exponente al cual pertenece el número 5 respecto del módulo 108.
2, a. Hallar las raíces primitivas respecto de los módulos 17, 289, 578.
b. Hallar las raíces primitivas respecto de los módulos 23, 529, 1 058.
c. Hallar la raíz primitiva mínima respecto del módulo 242.
3, a. Formar la tabla de índices respecto del módulo 17.
b. Formar la tabla de índices respecto del módulo 23.
4, a. Hallar una raíz primitiva respecto del módulo 71, empleando la nota del ejemplo **c**, § **5**.
b. Hallar una raíz primitiva respecto del módulo 191.
5, a. Sirviéndose de la tabla de índices, indicar la cantidad de soluciones de las congruencias:
α). $x^{60} \equiv 79$ (mód. 97), β) $x^{55} \equiv 17$ (mód. 97), γ) $x^{15} \equiv 46$ (mód. 97).
b. Indicar la cantidad de soluciones de las congruencias:
α) $3x^{12} \equiv 31$ (mód. 41), β) $7x^7 \equiv 11$ (mód. 41), γ) $5x^{30} \equiv 37$ (mód. 41).
6, a. Sirviéndose de la tabla de índices, resolver las congruencias:

α) $x^2 \equiv 59$ (mód. 67), β) $x^{35} \equiv 17$ (mód. 67),
γ) $x^{30} \equiv 14$ (mód. 67).

b. Resolver las congruencias:

α) $23x^5 \equiv 15$ (mód. 73), β) $37x^6 \equiv 69$ (mód. 73),
γ) $44x^{21} \equiv 53$ (mód. 73).

7, a. Aplicando el teorema **c**, § **5**, determinar la cantidad de soluciones de las congruencias:

α) $x^8 \equiv 2$ (mód. 37), β) $x^{16} \equiv 10$ (mód. 37).

b. Determinar la cantidad de soluciones de las congruencias:

α) $x^5 \equiv 3$ (mód. 71), β) $x^{21} \equiv 5$ (mód. 71).

8, a. Empleando el método de la pregunta 8, resolver las congruencias (al resolver la segunda congruencia se debe utilizar la tabla de raíces primitivas que viene insertada al final del libro):

$$\alpha)\ x^7 \equiv 37 \ (\text{mód. } 101), \quad \beta)\ x^5 \equiv 44 \ (\text{mód. } 101).$$

b. Resolver la congruencia

$$x^3 \equiv 23 \ (\text{mód. } 109).$$

9, a. Empleando la tabla de índices, indicar, entre los restos del sistema reducido de restos respecto del módulo 19: α) los restos cuadráticos, β) los restos cúbicos.

b. Indicar, entre los restos del sistema reducido de restos respecto del módulo 37: α) los restos de grado 15, β) los restos de grado 8.

10, a. Indicar, entre los restos del sistema reducido de restos respecto del módulo 43: α) los números que pertenecen al exponente 6, β) las raíces primitivas.

b. Indicar entre los restos del sistema reducido de restos respecto del módulo 61: α) los números que pertenecen al exponente 10, β) las raíces primitivas.

Respuestas a las preguntas

Respuestas a las preguntas del capítulo I

1. El resto de la división de $ax + by$ por d, teniendo la forma $ax' + by'$ y siendo menor que d, es necesariamente igual a cero. Por ello, d es un divisor de todos los números de la forma $ax + by$ y, en particular, es un divisor común de los números $a \cdot 1 + b \cdot 0 = a$ y $a \cdot 0 + b \cdot 1 = b$. Por otra parte, la expresión de d muestra que todo divisor común de los números a y b divide a d. Por lo tanto, $d = (a, b)$ y el teorema **1**, **d**, § **2** es justo. Los teoremas **e**, § **2** se demuestran así: el menor número positivo de la forma $amx + bmy$ es $amx_0 + bmy_0$; el menor número positivo de la forma $\frac{a}{\delta} x + \frac{b}{\delta} y$ es $\frac{a}{\delta} x_0 + \frac{b}{\delta} y_0$.
La generalización de estos resultados es trivial.

2. Sea $\delta' = \frac{k}{l}$ una fracción irreducible con la condición $0 < l < Q_s$. Para $\delta_s = \alpha$ el teorema es evidente. Por ello, suponemos que δ_s no es igual a α y que, por consiguiente, existe δ_{s+1}. Limitémonos al caso $\delta_s < \delta_{s+1}$. Está claro que

$$|\delta' - \delta_s| \leqslant \frac{1}{lQ_s} > \frac{1}{Q_{s+1}Q_s}, \quad |\delta' - \delta_{s+1}| \geqslant \frac{1}{lQ_{s+1}} > \frac{1}{Q_{s+1}Q_s}.$$

Por esto, no puede ser $\delta_s \leqslant \delta' \leqslant \delta_{s+1}$ y, por lo tanto, o $\delta' < \delta_s$, o bien $\delta_{s+1} < \delta'$. En ambos casos δ_s está más próximo a α que δ'.

3. Si $n \leqslant 6$ el teorema es evidente; por lo tanto, suponemos que $n > 6$. Se tiene

$$\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots; \qquad \log_{10} \xi = 0,\ 2\ldots;$$

$$\begin{aligned}
&Q_2 \geqslant 1 && = g_1 = 1,\\
&Q_3 \geqslant Q_2 + 1 && \geqslant g_2 = 2 > \xi,\\
&Q_4 \geqslant Q_3 + Q_2 && \geqslant g_3 = g_2 + g_1 > \xi + 1 = \xi^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$Q_n \geqslant Q_{n-1} + Q_{n-2} \geqslant g_{n-1} = g_{n-2} + g_{n-3} > \xi^{n-3} + \xi^{n-4} = \xi^{n-2}.$$

De aquí que

$$N > \xi^{n-2}; \quad n < \frac{\log_{10} N}{\log_{10} \xi} + 2 < 5k + 2; \quad n \leqslant 5k + 1.$$

4, a. Para las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$ se tiene $0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -1$. Intercalando la fracción $\frac{A+C}{B+D}$ entre las fracciones $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ que satisfacen a la condición $AD - BC = -1$, se tiene $A(B+D) - B(A+C) = (A+C)D - -(B+D)C = -1$. Por lo tanto, es cierta la afirmación señalada al final de la pregunta. La existencia de una fracción $\frac{k}{l}$ con las condiciones $\frac{a}{b} < \frac{k}{l} < \frac{c}{d}$, $l \leqslant \tau$, es imposible. En caso contrario se tendría que

$$\frac{k}{l} - \frac{a}{b} \geqslant \frac{1}{lb}; \quad \frac{c}{d} - \frac{k}{l} \geqslant \frac{1}{ld}; \quad \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geqslant \frac{b+d}{lbd} > \frac{1}{bd}.$$

b. Está claro que es suficiente considerar el caso $0 \leqslant \alpha < 1$. Supongamos que $\frac{a}{b} \leqslant \alpha < \frac{c}{d}$, donde $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones consecutivas de la sución de Farey, correspondientes a τ. Son posibles dos casos:

$$\frac{a}{b} \leqslant \alpha < \frac{a+c}{b+d}; \quad \frac{a+c}{b+d} \leqslant \alpha < \frac{c}{d}.$$

Por lo tanto, se verifica una de las dos desigualdades

$$\left| a - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b(b+d)}; \quad \left| d - \frac{c}{d} \right| \leqslant \frac{1}{d(b+d)},$$

de donde, en virtud de que $b + d > \tau$, se deduce inmediatamente el teorema indicado.

c. Si α es una fracción irreducible $\alpha = \frac{a}{b}$ con la condición $b \leqslant \tau$, por $\frac{P}{Q}$ se puede tomar la fracción misma $\frac{a}{b}$. En caso contrario, por $\frac{P}{Q}$ se puede tomar la fracción reducida $\frac{P_s}{Q_s}$ que cumple la condición $Q_s \leqslant \tau < Q_{s+1}$.

5, a. Los residuos que resultan al dividir los números primos impares por 4 son iguales a 1 ó a 3. El producto de números de la forma $4m + 1$ es de la forma $4m + 1$. Por lo tanto, el número $4p_1 \ldots p_k - 1$, donde $p_1, \ldots, p_k$ son primos de la forma $4m + 3$, tiene que tener un divisor primo q de la forma $4m + 3$. El número q no coincide con ninguno de los números $p_1, \ldots, p_k$.

b. Los números primos superiores a 3 son de la forma $6m+1$ o de la forma $6m+5$. El número $6p_1 \ldots p_k - 1$, donde $p_1, \ldots, p_k$ son primos de la forma $6m+5$, tiene que tener un divisor primo q de la forma $6m+5$. El número q no coincide con ninguno de los números $p_1, \ldots, p_k$.

6. Supongamos que $p_1, \ldots, p_k$ son k números primos cualesquiera y sea N un entero que cumpla las condiciones $2 < N$, $(3 \ln N)^k < N$. La cantidad de números a de la sucesión $1, 2, \ldots, N$, cuyas descomposiciones canónicas tienen la forma $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ no es superior a

$$\left(\frac{\ln N}{\ln 2}+1\right)^k < (3 \ln N)^k < N,$$

puesto que $\alpha_s \leqslant \frac{\ln N}{\ln 2}$.

Por lo tanto, en la sucesión $1, 2, \ldots, N$ hay números en cuyas descomposiciones canónicas figuran primos distintos de $p_1, \ldots, p_k$.

7. Se obtienen tales sucesiones, por ejemlpo, para

$$M = 2 \cdot 3 \ldots (K+1)\, t + 2; \quad t = 1, 2, \ldots$$

8. Tomando un entero x_0 con la condición de que para $x \geqslant x_0$ sea $f(x) > 1$ y $f'(x) > 0$, hagamos $f(x_0) = X$. Todos los números $f(x_0 + Xt)$, $t = 1, 2, \ldots$, son compuestos (múltiplos de X).

9, a. Si se cumple (1), entonces uno de los números x, y es par; sea x par. De la igualdad

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{z+y}{2}\,\frac{z-y}{2},$$

donde, evidentemente, $\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}\right) = 1$, nos convencemos de la existencia de números enteros positivos u y v que cumplen las condiciones

$$\frac{x}{2} = uv, \qquad \frac{z+y}{2} = u^2, \qquad \frac{z-y}{2} = v^2.$$

De aquí se deduce que las condiciones indicadas en la pregunta son necesarias.

Es obvio que dichas condiciones son suficientes.

b. Convengamos en designar aquí con letras solamente los números enteros positivos. Supongamos que existen sistemas x, y, z, que cumplen las condiciones $x^4 + y^4 = z^2$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $(x, y, z) = 1$; elijamos entre ellos el sistema con el valor menor de z. Suponiendo que x es par, obtenemos $x^2 = 2uv$, $y^2 = u^2 - v^2$, $u > v \geqslant 1$, $(u, v) = 1$, donde v es par (si u fuese par, tendríamos $y^2 = 4N+1$, $u^2 = 4N_1$, $v^2 = 4N_2 + 1$, $4N + 1 = 4N_1 - 4N_2 - 1$, lo cual es

imposible). De aquí que

$$u = z_1^2, \quad v = 2w^2, \quad y^2 + 4w^4 = z_1^4, \quad 2w^2 = 2u_1v_1,$$

$u_1 = x_1^2$, $v_1 = y_1^2$, $x_1^4 + y_1^4 = z_1^2$, lo cual es imposible, puesto que $z_1 < z$. De la irresolubilidad de la ecuación $x^4 + y^4 = z^2$, como un caso particular se deduce también, evidentemente, la irresolubilidad de la ecuación $x^4 + y^4 = t^4$ en enteros positivos x, y, t.

10. Haciendo $x = \frac{k}{l}$; $(k, l) = 1$, obtenemos

$$k^n + a_1k^{n-1}l + \ldots + a_nl^n = 0.$$

Por lo tanto, k^n es un múltiplo de l y, por consiguiente, $l = 1$.

11, a. Supongamos que k es el mayor número entero que cumple la condición $2^k \leqslant n$ y sea P el producto de todos los números impares que no son superiores a n. El número $2^{k-1}PS$ se expresa en forma de una suma cuyos términos, a excepción de $2^{k-1}P\frac{1}{2^k}$, son números enteros.

b. Supongamos que k es el mayor número entero que cumple la condición $3^k \leqslant 2n + 1$ y sea P el producto de todos los números que son primos con el número 6 y que no son superiores a $2n + 1$. El número $3^{k-1}PS$ se expresa en forma de una suma cuyos términos, a excepción de $3^{k-1}P\frac{1}{3^k}$ son números enteros.

12. Para $n \leqslant 8$ el teorema se comprueba inmediatamente. Por lo tanto, suponiendo que $n > 8$ y que el teorema es válido para los binomios $a + b$, $(a + b)^2$, ..., $(a + b)^{n-1}$, hay que demostrar el teorema para $(a + b)^n$. Pero los coeficientes del desarrollo de este binomio, a excepción de los extremos que son iguales a 1, son los números

$$\frac{n}{1}, \quad \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \ldots, \quad \frac{n(n-1)\ldots 2}{1\cdot 2\ldots(n-1)}.$$

Para que todos estos números sean impares es necesario y suficiente que sean impares los números de los extremos, los cuales son precisamente iguales a n, y también que sean impares todos los números que se obtienen al borrar los factores impares de los numeradores y denominadores de los números restantes. Pero, haciendo $n = 2n_1 + 1$, estos números se pueden expresar como los términos de la sucesión

$$\frac{n_1}{1}, \quad \frac{n_1(n_1-1)}{1\cdot 2}, \ldots, \quad \frac{n_1(n_1-1)\ldots 2}{1\cdot 2\ldots(n_1-1)}.$$

Mas éstos, como $n_1 < n$, son impares cuando, y sólo cuando, n_1 es de la forma $2^k - 1$, es decir, cuando n es de la forma $2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$.

Respuestas a las preguntas del capítulo II

1, a. En la ordenada del punto de la curva $y = f(x)$ cuya abscisa es x, hay $[f(x)]$ puntos enteros de la región indicada.

b. La igualdad indicada se deduce de la igualdad $T_1 + T_2 = T$, donde T_1, T_2, T denotan la cantidad de puntos enteros en las regiones

$$0 < x < \frac{Q}{2}, \quad 0 < y < \frac{P}{Q}x.$$

$$0 < y < \frac{P}{2}, \quad 0 < x < \frac{Q}{P}y,$$

$$0 < x < \frac{Q}{2}, \quad 0 < y < \frac{P}{2}.$$

c. La igualdad indicada se deduce de la igualdad

$$T = 1 + 4(T_1 + T_2 + T_3 - T_4),$$

donde T_1, T_2, T_3, T_4 denotan la cantidad de puntos enteros en las regiones

$$x = 0, \quad 0 < y < r;$$

$$0 < x \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad 0 < y \leqslant \sqrt{r^2 - x^2};$$

$$0 < y \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad 0 < x \leqslant \sqrt{r^2 - y^2};$$

$$0 < x \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad 0 < y \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

d. La igualdad indicada se deduce de la igualdad $T = T_1 + T_2 - T_3$, donde T_1, T_2, T_3 denotan la cantidad de puntos enteros en las regiones

$$0 < x \leqslant \sqrt{n}, \quad 0 < y \leqslant \frac{n}{x};$$

$$0 < y \leqslant \sqrt{n}, \quad 0 < x \leqslant \frac{n}{y};$$

$$0 < x \leqslant \sqrt{n}, \quad 0 < y \leqslant \sqrt{n}.$$

e. En el caso de un rectángulo con los lados paralelos a los ejes coordenados, el teorema es evidente. En el caso de un trapecio con las bases paralelas a uno de los ejes coordenados y con un lado perpendi-

cular a las bases, el teorema se demuestra fácilmente considerando el rectángulo que se forma al unir dos trapecios de éstos. El caso de un triángulo se reduce fácilmente al caso del trapecio indicado. Del caso del triángulo no es difícil pasar también al caso general, observando que un polígono con una cantidad de vértices mayor que 3 se puede dividir en dos polígonos que tenga cada uno de ellos menor cantidad de vértices. Esto se puede hacer mediante un segmento rectilíneo que tenga los extremos en los vértices del polígono y que cada punto del mismo, a excepción de los extremos, sea un punto interior del polígono.

2. La cantidad de números enteros positivos, no superiores a n, es igual a $[n]$. Cada uno de ellos se expresa de un modo único en la forma xk^m, donde k es un entero positivo; a cada x dado corresponden $\left[\sqrt[m]{\frac{n}{x}}\right]$ números de tal forma.

3. Demostremos que las condiciones indicadas son necesarias. El número de valores x que cumplen la condición $[\alpha x] \leqslant N$ se puede expresar en la forma $\frac{N}{\alpha}+\lambda$; $0 \leqslant \lambda < \frac{1}{\alpha}$, y el número de valores y que cumplen la condición $[\beta y] \leqslant N$ se puede expresar en la forma $\frac{N}{\beta}+\lambda_1$; $0 \leqslant \lambda_1 < \frac{1}{\beta}$. De la igualdad $\frac{N}{\alpha}+\lambda+\frac{N}{\beta}+\lambda_1=N$, dividiendo por N y pasando al límite para $N \to \infty$, obtenemos $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$. Si α fuese racional, $\alpha=\frac{a}{b}$ $(a>b>0)$, de la última igualdad obtendríamos que $[\alpha b]=$ $=[\beta(a-b)]$. Por lo tanto, α y β no pueden ser racionales.

Supongamos que se cumplen las condiciones indicadas. Sea c un número natural. Sean $x_0=\frac{c}{\alpha}+\xi$ e $y_0=\frac{c}{\beta}+\eta$ los menores números enteros que cumplen las condiciones $x_0>\frac{c}{\alpha}$, $y_0>\frac{c}{\beta}$. Es obvio que $[\alpha x]$ no es igual a c si x no es igual a x_0, y $[\beta y]$ no es igual a c si y no es igual a y_0; además, $0<\xi<1$, $0<\eta<1$, $\alpha\xi$ y $\beta\eta$ son irracionales. Como $x_0+y_0=c+\xi+\eta$, se tiene $\xi+\eta=1$, $\frac{\alpha\xi}{\alpha}+\frac{\beta\eta}{\beta}=1$. Por lo tanto, uno y sólo uno de los números $[\alpha x_0]$ y $[\beta y_0]$ es igual a c.

4,a. Las diferencias mencionadas, para $\{\alpha x_t\}>0$ son iguales a

$$\{\alpha x_1\},\ \{\alpha(x_2-x_1)\},\ \ldots,\ \{\alpha(x_t-x_{t-1})\},\ \{-\alpha x_t\}.$$

Estas no son negativas, su suma es igual a 1, la cantidad de ellas es igual a $t+1$. Por lo tanto, al menos una de estas diferencias no es superior a $\frac{1}{t+1} < \frac{1}{\tau}$. Pero ésta tiene la forma $\{\alpha x'\} = \alpha x' - y'$, donde x' es un número entero que cumple la condición $0 < |x'| \leqslant \tau$ y $y' = \{\alpha x'\}$. Por consiguiente, designando con la letra h el número 1 ó -1, de modo que sea $hx' > 0$, se tiene $|\alpha hx' - hy'| < \frac{1}{\tau}$. De aquí, designando con las letras Q y P los cocientes que se obtienen al dividir hx' y hy' por (hx', hy'), resulta

$$|\alpha Q - P| < \frac{1}{\tau}; \quad 0 < Q \leqslant \tau,$$

de donde se deduce el teorema mencionado en la pregunta.

b. Haciendo $t_1 = [\tau_1]$, $t_2 = [\tau_2]$, ..., $t_k = [\tau_k]$ y suponiendo que x_1, x_2, ..., x_k recorren los valores

$$x_1 = 0, 1, \ldots, t_1; \; x_2 = 0, 1, \ldots, t_2; \; \ldots; \; x_k = 0, \; 1, \ldots, t_k,$$

consideramos la sucesión formada por los números $\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \ldots + \alpha_k x_k\}$ y el número 1, dispuestos en orden no decreciente. Formando las diferencias de los números consecutivos de esta sucesión, se obtienen $(t_1+1)(t_2+1)\ldots(t_k+1)$ diferencias. Al menos una de éstas no es superior a

$$\frac{1}{(t_1+1)(t_2+1)\ldots(t_k+1)} < \frac{1}{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k}.$$

Pero dicha diferencia tiene la forma $\{\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \ldots + \alpha_k x'_k\}$, donde x'_1, x'_2, ..., x'_k son números enteros que cumplen las condiciones $|x'_1| \leqslant \leqslant \tau_1$, $|x'_2| \leqslant \tau_2$, ..., $|x'_k| \leqslant \tau_k$, y no son simultáneamente iguales a cero. Haciendo $[\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \ldots + \alpha_k x'_k] = y'$ y designando con los símbolos ξ_1, ξ_2, ..., ξ_k, η los cocientes que se obtienen al dividir x'_1, x'_2, ..., x'_k y por $(x'_1 x'_2, \ldots, x'_k, y')$, resulta

$$|\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_k \xi_k - \eta| < \frac{1}{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k},$$

lo cual demuestra el teorema indicado en la pregunta.

5. Se tiene $\alpha = cq + r + \{\alpha\}$; $0 \leqslant r < c$,

$$\left[\frac{[\alpha]}{c}\right] = \left[q + \frac{r}{c}\right] = q, \quad \left[\frac{\alpha}{c}\right] = \left[q + \frac{r+\{\alpha\}}{c}\right] = q.$$

6, a. Se tiene $[\alpha + \beta + \ldots + \lambda] = [\alpha] + [\beta] + \ldots + [\lambda] + [\{\alpha\} + \{\beta\} + \ldots \ldots + \{\lambda\}]$.

b. El número primo p figura en $n!$, $a!$, ..., $l!$ con los exponentes

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\dots,\quad \left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{a}{p^2}\right]+\dots,\quad \dots,\quad \left[\frac{l}{p}\right]+\left[\frac{l}{p^2}\right]+\dots$$

Además

$$\left[\frac{n}{p^s}\right]\geqslant\left[\frac{a}{p^s}\right]+\dots+\left[\frac{l}{p^s}\right].$$

7. Suponiendo que existe un número a con las propiedades indicadas, representémoslo en la forma

$$a=q_kp^{k+1}+q_{k-1}p^k+\dots+q_1p^2+q_0p+q';$$

$$0<q_k<p,\ 0\leqslant q_{k-1}<p,\ \dots,\ 0\leqslant q_1<p,\ 0\leqslant q_0<p,\ 0\leqslant q'<p.$$

Según **b**, § 1, tiene que ser

$$h=q_ku_k+q_{k-1}u_{k-1}+\dots+q_1u_1+q_0u_0.$$

Por otra parte, para cualquier $s=1,\ 2,\ \dots,\ m$, se tiene

$$q_{s-1}u_{s-1}+q_{s-2}u_{s-2}+\dots+q_1u_1+q_0u_0<u_s.$$

Por lo tanto, la última expresión de h tiene que coincidir por completo con la señalada en la pregunta.

8, a. Sea x_1 un entero, $Q\leqslant\alpha<\beta\leqslant R$, $x_1<\alpha<\beta<x_1+1$. Integrando por partes, se obtiene

$$-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \rho'(x)f(x)\,dx=$$

$$=\rho(\beta)f(\beta)-\rho(\alpha)f(\alpha)-\sigma(\beta)f'(\beta)+\sigma(\alpha)f'(\alpha)+\int_\alpha^\beta \sigma(x)f''(x)\,dx.$$

En particular, para $Q\leqslant x_1$, $x_1+1\leqslant R$, pasando al límite se tiene

$$-\int_{x_1}^{x_1+1} f(x)\,dx=-\frac{1}{2}f(x_1+1)-\frac{1}{2}f(x_1)+\int_{x_1}^{x_1+1}\sigma(x)f''(x)\,dx.$$

La fórmula indicada se obtiene ahora sin dificultad.

b. Escribiendo la fórmula de la pregunta **a** en la forma

$$\sum_{Q<x\leqslant R} f(x)=\int^R f(x)\,dx-\int^Q f(x)\,dx+\rho(R)f(R)-\rho(Q)f(Q)-$$

$$-\sigma(R)f'(R)+\sigma(Q)f'(Q)+\int_Q^\infty \sigma(x)f''(x)\,dx-\int_R^\infty \sigma(x)f''(x)\,dx,$$

nos convencemos de que la fórmula indicada es justa.

c. Aplicando el resultado de la pregunta **b**, hallamos

$$\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n=$$

$$=C+n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln n+\int_n^\infty \frac{\sigma(x)}{x^2}dx=n\ln n-n+O(\ln n).$$

9, a. α) Se tiene (b, § 1)

$$\ln([n]!)=\sum_{p\leqslant n}\left(\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots\right)\ln p. \qquad (1)$$

Aquí el segundo miembro representa la suma de los valores de la función $\ln p$, extendida a los puntos enteros (p, s, u) con valores primos p de la región $p>0$, $s>0$, $0<u\leqslant\frac{n}{p^s}$. La parte de la suma que corresponde a unos valores s y u dados, es igual a $\theta\left(\sqrt[s]{\frac{n}{u}}\right)$; la parte que corresponde a un valor dado u, es igual a $\psi\left(\frac{n}{u}\right)$.

β) Aplicando para $n\geqslant 2$ el resultado de la pregunta α), se tiene

$$\ln([n]!)-2\ln\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)=$$

$$=\psi(n)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)+\psi\left(\frac{n}{3}\right)-\psi\left(\frac{n}{4}\right)+\ldots\geqslant\psi(n)-\psi\left(\frac{n}{2}\right).$$

Haciendo $\left[\frac{n}{2}\right]=m$, de aquí hallamos que ($[n]=2m$, o $[n]=2m+1$)

$$\psi(n)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)\leqslant\ln\frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\ln\left(2^m\frac{3\cdot 5\ \ldots,\ (2m+1)}{1\cdot 2\ldots m}\right)\leqslant\ln(2^m 3^m)<n.$$

$$\psi(n)=\psi(n)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)+\psi\left(\frac{n}{2}\right)-\psi\left(\frac{n}{4}\right)+$$

$$+\psi\left(\frac{n}{4}\right)-\psi\left(\frac{n}{8}\right)+\ldots<n+\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\ldots=2n.$$

γ) Se tiene (la solución de la pregunta β) y el resultado de la pregunta **8, c**)

$$\psi(n)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)+\psi\left(\frac{n}{3}\right)-\psi\left(\frac{n}{4}\right)+\ldots=\ln\frac{[n]!}{\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2}=$$

$$=[n]\ln[n]-[n]-2\left[\frac{n}{2}\right]\ln\left[\frac{n}{2}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+O(\ln n)=$$

$$=n\ln 2+O(\ln n).$$

Por otra parte, para $s \geqslant 2$ obtenemos (pregunta β))

$$\theta(\sqrt[s]{n})-\theta\left(\sqrt[s]{\frac{n}{2}}\right)+$$
$$+\theta\left(\sqrt[s]{\frac{n}{3}}\right)-\ldots\begin{cases}<2\sqrt[s]{n} \text{ siempre}\\ =0 \text{ si } s>\tau;\ \tau=\left[\frac{\ln n}{\ln 2}\right].\end{cases}$$

Por lo tanto

$$0\leqslant\psi(n)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)+\psi\left(\frac{n}{3}\right)-\psi\left(\frac{n}{4}\right)+\ldots-$$
$$-\left(\theta(n)-\theta\left(\frac{n}{2}\right)+\theta\left(\frac{n}{3}\right)-\theta\left(\frac{n}{4}\right)+\ldots\right)<$$
$$<2\sqrt{n}+2\sqrt[3]{n}+2\sqrt[4]{n}+\ldots+2\sqrt[\tau]{n}<2(\sqrt{n}+\tau\sqrt[3]{n})=O(\sqrt{n}).$$

b. Se deduce de la igualdad (1), de la desigualdad de la pregunta **a**, β) y de la igualdad de la pregunta 8, **c**.

c. Para m suficientemente grande, de la igualdad de la pregunta **b**, se tiene

$$\sum_{m<p\leq m^2}\frac{\ln p}{p}=\ln m+O(1)\geqslant\frac{\ln m}{2},\qquad \sum_{m<p\leq m^2}\frac{4}{p}>1.$$

Si para todos los pares p_n, p_{n+1} que cumplen la condición $m<p_n<$ $<p_{n+1}\leqslant m^2$ se verificase la desigualdad $p_{n+1}>p_n(1+\varepsilon)$, resultaría

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{4}{m(1+\varepsilon)^r}>1.$$

lo cual es imposible para valores suficientemente grandes de m.

d. Evidentemente, es suficiente considerar solamente el caso en que n es entero.

Haciendo $\gamma(r)=\frac{\ln r}{r}$ si r es primo y $\gamma(r)=0$ si $r=1$ o si r es compuesto, se tiene (pregunta **b**)

$$\gamma(1)+\gamma(2)+\ldots+\gamma(r)=\ln r+\alpha(r);\quad |\alpha(r)|<C_1,$$

donde C_1 es una constante. De aquí, para $r>1$

$$\gamma(r)=\ln r-\ln(r-1)+\alpha(r)-\alpha(r-1),$$
$$\sum_{0<p\leq n}\frac{1}{p}=T_1+T_2;\quad T_1=\sum_{1<r\leq n}\frac{\ln r-\ln(r-1)}{\ln r}$$
$$T_2=\sum_{1<r\leq n}\frac{\alpha(r)-\alpha(r-1)}{\ln r}.$$

Se tiene (8, b)

$$T_1 = \sum_{1<r\leq n} \frac{1}{r \ln r} + \sum_{1<r\leq n} \left(\frac{1}{2r^2 \ln r} + \frac{1}{3r^3 \ln r} + \ldots\right) =$$

$$= C_2 + \ln \ln n + O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

donde C_2 es una constante. Luego hallamos

$$T_2 = \alpha(2)\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \alpha(n-1)\left(\frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln n}\right) + \frac{\alpha(n)}{\ln n},$$

de donde se deduce que

$$T_2 = C_3 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

donde C_3 es la suma de la serie absolutamente convergente

$$\alpha(2)\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\right) + \alpha(3)\left(\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4}\right) + \ldots$$

e. Se tiene

$$\ln \prod_{p\leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = -\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} - \sum_{p\leq n} \left(\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{3p^3} + \ldots\right) =$$

$$= C' - \ln \ln n + O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

donde C' es una constante. De aquí, haciendo $C' = \ln C_0$, obtenemos la igualdad indicada.

f. Haciendo $n = [1{,}5\, s \ln s]$ y representando con la notación $\pi(n)$ la cantidad de números primos que no son superiores a n, de la igualdad de la pregunta **9**, **a**, γ) deducimos (C es una constante positiva)

$$\pi(n) > \frac{n \ln 2 - C\sqrt{n}}{\ln n},$$

lo cual es mayor que s, si s_0 se ha elegido suficientemente grande. De aquí se deduce que, si $s \geqslant s_0$, el número p_s está comprendido entre los números primos que no son superiores a n.

g. Sean $q_1, q_2, \ldots, q_s$ los divisores primos distintos del número a. Hallamos: $2, 3, 4, \ldots, (s+1) \leqslant a$, de donde (pregunta **8**, **c**)

$$(s+1)\ln(s+1) + O(s+1) \leqslant a, \quad s = 0(\ln a).$$

Por lo tanto (preguntas **e** y **f**)

$$\frac{a}{\varphi(a)}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_s}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)}=O(\ln p_s)=O(\ln\ln a).$$

10, a. Se deduce de **c**, **§ 2**.

b. Como $\theta(1)=\psi(1)=1$, se cumple la condición **1, a, § 2** para la función $\theta(a)$. Sea $a=a_1a_2$ una de las descomposiciones de a en dos factores, primos entre sí. Se tiene

$$\sum_{d_1\diagdown a_1}\sum_{d_2\diagdown a_2}\theta(d_1d_2)=\psi(a)=\psi(a_1)\,\psi(a_2)=\sum_{d_1\diagdown a_1}\sum_{d_2\diagdown a_2}\theta(d_1)\,\theta(d_2). \quad (1)$$

Si se cumple la condición **2, a, § 2** para todos los productos menores que a, entonces, para $d_1d_2<a$ se tiene $\theta(d_1d_2)=\theta(d_1)\,\theta(d_2)$, y según la igualdad (1) resulta $\theta(a_1a_2)=\theta(a_1)\,\theta(a_2)$, es decir, también se cumple la condición **2, a, § 2** para todos los productos a_1a_2 que son iguales a a. Mas la condición **2, a, § 2** se cumple para el único producto $1\cdot 1$, igual a 1. Por consiguiente, ésta se cumple también para todos los productos.

11, a. Sea $m>1$; para cada x_m dado que sea divisor de a, la ecuación indeterminada $x_1\ldots x_{m-1}x_m=a$ admite $\tau_{m-1}\left(\frac{a}{x_m}\right)$ soluciones. Por esto,

$$\tau_m(a)=\sum_{x_m\diagdown a}\tau_{m-1}\left(\frac{a}{x_m}\right),$$

pero cuando x_m recorre todos los divisores del número a, el número $d=\frac{a}{x_m}$ recorre en orden inverso los mismos divisores. Por consiguiente,

$$\tau_m(a)=\sum_{d\diagdown a}\tau_{m-1}(a).$$

Por lo tanto (pregunta **10, a**), si el teorema subsiste para la función $\tau_{m-1}(a)$, entonces también subsiste para la función $\tau_m(a)$. Pero el teorema es válido para la función $\tau_1(a)=1$. Esto significa que el teorema siempre es válido.

b. Si el teorema subsiste para la función $\tau_m(p^\alpha)$, se tiene

$$\tau_{m+1}(p^\alpha)=\sum_{s=0}^{\alpha}\tau_m(p^s)=\sum_{s=0}^{\alpha}\frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+m-1)}{1\cdot 2\ldots(m-1)}=$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m)}{1\cdot 2\ldots m}.$$

Por consiguiente, el teorema subsiste también para la función $\tau_{m+1}(p^{\alpha})$. Pero el teorema es válido para la función $\tau_2(p^{\alpha})$ $\left(\text{evidentemente, igual a } \frac{\alpha+1}{1}\right)$. Por lo tanto, siempre es válido.

c. Supongamos que $\varepsilon = m\varepsilon_2$, $\varepsilon_2 = 2\eta$, y que $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ es la descomposición canónica del número a, donde $p_1, \dots, p_k$ están dispuestos en orden creciente. Para la función $\tau_2(a) = \tau(a)$ se tiene

$$\frac{\tau(a)}{a^{\eta}} \leqslant \frac{\alpha_1+1}{2^{\alpha_1\eta}} \frac{\alpha_2+1}{3^{\alpha_2\eta}} \cdots \frac{\alpha_k+1}{(k+1)^{\alpha_k\eta}}.$$

Suponiendo, para simplificar los razonamientos, que $\varepsilon < 1$, nos convencemos de que cada uno de los factores que figuran en el segundo miembro es menor que $\frac{1}{\eta}$; los factores $\frac{\alpha_{r-1}+1}{r^{\alpha_{r-1}\eta}}$ que cumplen la condición $r > 2^{\frac{1}{\eta}}$ son menores que 1. Por lo tanto, haciendo $C = \left(\frac{1}{\eta}\right)^{2^{\frac{1}{\eta}}}$, hallamos

$$\frac{\tau(a)}{a^{\eta}} < C, \quad \lim_{a\to\infty} \frac{\tau(a)}{a^{\varepsilon_2}} \leqslant \lim_{a\to\infty} \frac{C}{a^{\eta}} = 0.$$

Si $m > 2$, evidentemente, se tiene $\tau_m(a) \leqslant (\tau(a))^m$. Por ello

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\tau_m(a)}{a^{\varepsilon}} \leqslant \lim \left(\frac{\tau(a)}{a^{\varepsilon_2}}\right)^m = 0.$$

d. Los sistemas de valores $x_1, \dots, x_m$ que satisfacen a la desigualdad indicada los dividimos en $[n]$ clases con los números de orden $1, 2, \dots, [n]$. A la clase del número de orden a referimos los sistemas que cumplen la condición $x_1 \dots x_m = a$; la cantidad de sistema de éstos es igual a $\tau_m(a)$.

12. Si $R(s) > 1$, la serie que expresa $\zeta(s)$ es absolutamente convergente. Por lo tanto

$$(\zeta(s))^m = \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=1}^{\infty} \frac{1}{(n_1 \dots n_m)^s}.$$

Además, para un n positivo dado, la cantidad de sistemas $n_1, \dots, n_m$ que cumplen la condición $n_1 \dots n_m = n$, es igual a $\tau_m(n)$.

13, a. Si $R(s)>1$, el producto $P=\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ es absolutamente convergente. Como $\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots$, para $N>2$ se tiene

$$\prod_{p\leq N}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\sum_{0<n\leq N}\frac{1}{n^s}+\sum{}'\frac{1}{n^s},$$

donde en la segunda suma del segundo miembro n recorre solamente los números que son superiores a N. Pasando al límite para $N\to\infty$, en el primer miembro resulta P, en la primera suma del segundo miembro resulta $\zeta(s)$, y en la segunda cero.

b. Sea $N>2$. Suponiendo que no hay números primos distintos de $p_1, \ldots, p_k$, obtenemos (compárese con la solución de la pregunta **a**)

$$\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{1-\frac{1}{p_j}}\geqslant\sum_{0<n\leq N}\frac{1}{n}.$$

Como la serie armónica $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ es divergente, para N suficientemente grande, esta desigualdad es imposible.

c. Suponiendo que no hay números primos distintos de $p_1, \ldots, p_k$, obtenemos (pregunta **a**)

$$\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{1-\frac{1}{p_j^2}}=\zeta(2).$$

Como el número $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ es irracional, esta igualdad es imposible.

14. Si $R(s)>1$, el producto infinito para $\zeta(s)$ de la pregunta **13, a** es absolutamente convergente. Por lo tanto

$$\ln\zeta(s)=\sum_p\left(\frac{1}{p^s}+\frac{1}{2p^{2s}}+\frac{1}{3p^{3s}}+\ldots\right),$$

donde p recorre todos los números primos. Derivando, hallamos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_p\left(-\frac{\ln p}{p^s}-\frac{\ln p}{p^{2s}}-\frac{\ln p}{p^{3s}}-\ldots\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

15. Sea $N > 2$. Aplicando el teorema **c**, § 3, se tiene

$$\prod_{p\leq N}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\sum_{0<n\leq N}\frac{\mu(n)}{n^s}+\sum{}'\frac{\mu(n)}{n^s},$$

donde en la segunda suma del segundo miembro n recorre solamente los números que son mayores que N. Pasando al límite para $N\to\infty$ se obtiene la identidad indicada.

16, **a**. Apliquemos **d**, § 3 al caso

$$\delta=1,\ 2,\ \ldots,\ [n],\ f=1,\ 1,\ \ldots,\ 1.$$

Entonces, evidentemente, $S'=1$. Por otra parte, S_d representa el número de valores δ que son múltiplos de d, es decir, es igual a $\left[\frac{n}{d}\right]$.

b. α) El segundo miembro de la igualdad de la pregunta **a** expresa la suma de los valores de la función $\mu(d)$, extentida a los puntos enteros (d, u) de la región $d>0$, $0<u\leqslant\frac{n}{d}$. La parte de esta suma que corresponde a un u dado, es igual a $M\left(\frac{n}{u}\right)$.

β) La igualdad indicada se obtiene restando término a término las igualdades

$$M(n)+M\left(\frac{n}{2}\right)+M\left(\frac{n}{3}\right)+M\left(\frac{n}{4}\right)+\ldots=1,$$

$$2M\left(\frac{n}{2}\right)+\qquad 2M\left(\frac{n}{4}\right)+\ldots=2.$$

c. Supongamos que $n_1=[n]$; $\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_n$ se definen por la condición: δ_s es el mayor entero cuya l-ésima potencia es un divisor de s, $f_s=1$. Entonces $S'=T_{l,n}$, S_d es igual a la cantidad de números, no superiores a n, que son múltiplos de d^l, o sea, $S_d=\left[\frac{n}{d^l}\right]$. De aquí resulta la expresión indicada para $T_{l,n}$.

En particular, como $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, para la cantidad $T_{2,n}$ de números que no son superiores a n y que no son divisibles por el cuadrado de un entero, superior a 1, se tiene

$$T_{2,n}=\frac{6}{\pi^2}n+O(\sqrt{n}).$$

17, **a**. La igualdad indicada se obtiene de **d**, § 3, haciendo

$$\delta_s=(x_s,\ a),\quad f_s=f(x_s).$$

b. La igualdad indicada se obtiene de **d**, § 3, haciendo

$$\delta_s=(x_1^{(s)}, \ldots, x_k^{(s)}), \quad f_s=f(x_1^{(s)}, \ldots, x_k^{(s)}).$$

c. Aplicando **d**, § 3 al caso

$$\delta=\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\tau,$$

$$f=F\left(\frac{a}{\delta_1}\right), \quad F\left(\frac{a}{\delta_2}\right), \ldots, F\left(\frac{a}{\delta_\tau}\right),$$

donde en la primera fila vienen escritos todos los divisores del número a, se tiene

$$S'=F(a), \quad S_d=\sum_{D\diagdown\frac{a}{d}} F\left(\frac{a}{dD}\right)=G\left(\frac{a}{d}\right).$$

d. La igualdad indicada se deduce de

$$P'=f_1^{\sum\limits_{d\diagdown\delta_1}\mu(d)} f_2^{\sum\limits_{d\diagdown\delta_2}\mu(d)} \ldots f_n^{\sum\limits_{d\diagdown\delta_n}\mu(d)}.$$

18, a. Apliquemos el teorema de la pregunta 17, **a**, suponiendo que x recorre los números 1, 2, ..., a y tomando $f(x)=x^m$. Entonces

$$S'=\psi_m(a), \quad S_d=d^m+2^m d^m+\ldots+\left(\frac{a}{d}\right)^m d^m=d^m\sigma_m\left(\frac{a}{d}\right).$$

b. Se tiene

$$\psi_1(a)=\sum_{d\diagdown a}\mu(d)\left(\frac{a^2}{2d}+\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}\varphi(a).$$

El mismo resultado se puede obtener más fácilmente. Escribamos los números de la sucesión 1, ..., a que son primos con a, primero en orden creciente y luego en orden decreciente. La suma de los términos de ambas sucesiones que equidistan del origen, es igual a a; la cantidad de términos de cada sucesión es igual a $\varphi(a)$.

c. Se tiene

$$\psi_2(a)=\sum_{d\diagdown a}\mu(d)\left(\frac{a^3}{3d}+\frac{a^2}{2}+\frac{a}{6}d\right)=$$

$$=\frac{a^2}{3}\varphi(a)+\frac{a}{6}(1-p_1)\ldots(1-p_k).$$

19, a. Apliquemos el teorema de la pregunta 17, **a**, suponiendo que x recorre los números 1, 2, ..., $[z]$ y tomando $f(x)=1$. Entonces $S'=T_z$, S_d es igual a la cantidad de números, no superiores a z, que son múltiplos de d, o sea, $S_d=\left[\frac{z}{d}\right]$.

b. Se tiene

$$T_z = \sum_{d \setminus a} \mu(d) \frac{z}{d} + O(\tau(a)) = \frac{z}{a} \varphi(a) + O(a^{\varepsilon}).$$

c. Se deduce de la igualdad de la pregunta **a**.

20. Apliquemos el teorema de la pregunta 17, **a**, suponiendo que x recorre los números 1, 2, ..., N, donde $N > a$, y tomando $f(x) = \frac{1}{x^s}$. Entonces se obtiene

$$\sum_{x \leqslant N}' \frac{1}{x^s} = \sum_{d \setminus a} \mu(d) \sum_{0 < x \leqslant \frac{N}{d}} \frac{1}{d^s x^s} = \sum_{d \setminus a} \frac{\mu(d)}{d^s} \sum_{0 < x \leqslant \frac{N}{d}} \frac{1}{x^s}.$$

Pasando al límite para $N \to \infty$ se obtiene la identidad indicada.

21, a. Apliquemos el teorema de la pregunta 17, **b**, considerando los sistemas de valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ indicados en la definición de probabilidad P_N y tomando $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1$. Entonces $P_N = \frac{S'}{N^k}$,

$S_d = \left[\frac{N}{d}\right]^k$, y se tiene

$$P_N = \frac{\sum_{d=1}^{N} \mu(d) \left[\frac{N}{d}\right]^k}{N^k} = \sum_{d=1}^{N} \frac{\mu(d)}{d^k} + O\left(\sum_{d=1}^{N} \frac{1}{Nd^{k-1}}\right).$$

Por lo tanto

$$P_N = (\zeta(k))^{-1} + O(\Delta); \quad \Delta = \frac{1}{N} \text{ si } k > 2,$$

$$\Delta = \frac{\ln N}{N} \text{ si } k = 2.$$

b. Se tiene $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

22, a. Razonamientos elementales muestran que la cantidad de puntos enteros (u, v) que hay en la región $u^2 + v^2 \leqslant \rho^2$; $\rho < 0$, es igual a $\pi\rho^2 + O(\rho)$. Apliquemos el teorema 17, **b**, considerando las coordenadas x, y de los puntos enteros de la región $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, distintos del punto (0, 0), y haciendo $f(x, y) = 1$. Entonces $T = S' + 1$, S_d es igual a la cantidad de puntos enteros que hay en la región $u^2 + v^2 \leqslant$

$\leqslant \left(\frac{r}{d}\right)^2$, sin contar el punto (0, 0). Por lo tanto

$$S_d = \pi \frac{r^2}{d^2} + O\left(\frac{r}{d}\right),$$

$$T = \sum_{d=1}^{[r]} \mu(d) \pi \frac{r^2}{d^2} + O\left(\sum_{d=1}^{[r]} \frac{r}{d}\right) = \frac{6}{\pi} r^2 + O(r \ln r)$$

b. Razonando igual que anteriormente, se obtiene

$$T = \sum_{d=1}^{[r]} \mu(d) \frac{4}{3} \pi \frac{r^3}{d^3} + O\left(\sum_{d=1}^{[r]} \frac{r^2}{d^2}\right) = \frac{4\pi r^3}{3\zeta(3)} + O(r^2).$$

23, a. La cantidad de divisores d de un número $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, que no son divisibles por el cuadrado de un entero, superior a 1, y que tienen $\varkappa$ divisores primos, es igual a $\binom{k}{\varkappa}$; en este caso $\mu(d) = (-1)^{\varkappa}$. Por lo tanto

$$\sum_{d \setminus a} \mu(d) = \sum_{\varkappa=0}^{k} \binom{k}{\varkappa} (-1)^{\varkappa} = (1-1)^k = 0.$$

b. Supongamos que a tiene la misma forma que en la pregunta **a**. Es suficiente considerar el caso $m < k$. Para la suma indicada se tienen dos expresiones

$$\sum \mu(d) = \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \ldots + (-1)^m \binom{k}{m} =$$
$$= (-1)^m \left(\binom{k}{m+1} - \binom{k}{m+2} + \ldots\right).$$

Si m es par, entonces, para $m \leqslant \frac{k}{2}$ la primera expresión es >0, y para $m > \frac{k}{2}$ la segunda expresión es $\geqslant 0$. Si m es impar, entonces, para $m \leqslant \frac{k}{2}$ la primera expresión es <0, y para $m > \frac{k}{2}$ la segunda expresión es $\leqslant 0$.

c. La demostración es casi igual que en **d, §, 3,** pero teniendo en cuenta el resultado de la pregunta **b**.

d. La demostración es casi igual que en las preguntas **17, a** y **17, b.**

24. Supongamos que d recorre los divisores del número a. $\Omega(d)$ denota la cantidad de divisores primos del número d, $\Omega(a) = s$. De acuerdo

a la indicación hecha en la pregunta, se tiene (suponemos que N es suficientemente grande)

$$\pi(N, q, l) \leqslant \sum_{\Omega(d)\leqslant m} \mu(d)\left(\frac{N}{qd}+\theta_d\right)=T+T_0-T_1;\quad |\theta_d|\leqslant 1.$$

$$|T|\leqslant \sum_{\Omega(d)\leqslant m} 1,\quad T_0=\frac{N}{q}\sum_{d}\frac{\mu(d)}{d},\quad |T_1|=\sum_{\Omega(d)>m}\frac{N}{qd}.$$

Luego hallamos

$$|T|\leqslant \sum_{n=0}^{m}\binom{s}{n}\leqslant s^m\leqslant e^{hm}<e^{5r^{1-c}}\ln r\frac{qr}{N}\frac{N}{qr}=O(\Delta),$$

$$T_0=\frac{N}{q}\frac{\prod\limits_{p\leqslant e^h}\left(1-\frac{1}{p}\right)}{\prod\limits_{p\backslash q}\left(1-\frac{1}{p}\right)}=O(\Delta).$$

Finalmente, designando con las letras C_1 y C_2 unas constantes, se tiene

$$T_1\leqslant\frac{N}{q}\sum_{n=m+1}^{s}\sum_{\Omega(d)=n}\frac{1}{d}\leqslant\frac{N}{q}\sum_{n=m+1}^{s}\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p_s}\right)^n}{n!}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{N}{q}\sum_{n=m+1}^{s}\left(\frac{C_1+\ln r}{4\ln r}e\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant\frac{N}{q}\sum_{n=m+1}^{s}\left(\frac{3}{4}\right)^n<C_2\frac{N}{q}r^{-4\ln\frac{4}{3}}=O(\Delta).$$

25. A todo divisor d_1 del número a, que cumple la condición $d_1<\sqrt{a}$, le corresponde un divisor d_2 que cumple las condiciones $d_2>\sqrt{a}$, $d_1d_2=a$. Ahora bien, $\mu(d_1)=\mu(d_2)$. Por lo tanto,

$$2\sum_{d_1}\mu(d_1)=\sum_{d_1}\mu(d_1)+\sum_{d_2}\mu(d_2)=\sum_{d\backslash a}\mu(d)=0$$

26. Los números d que no son divisibles por el cuadrado de un entero, superior a 1, y que satisfacen a la condición $\varphi(d)=k$, los consideramos

a pares, de modo que en cada par figure un impar d_1 y un par $2d_1$. Se tiene $\mu(d_1)+\mu(2d_1)=0$.

27. Sean $p_1, \ldots, p_k$ distintos números primos. Haciendo $a=p_1 \ldots p_k$, se tiene

$$\varphi(a)=(p_1-1)\ldots(p_k-1).$$

Sin embargo, si no hubiese números primos, distintos de $p_1, \ldots, p_k$, se tendría $\varphi(a)=1$.

28, a. Los números indicados se hallan entre los números $s\delta$; $s=1, 2, \ldots, \frac{a}{\delta}$. Pero $(s\delta, a)=\delta$ cuando, y sólo cuando, $\left(s, \frac{a}{\delta}\right)=1$ (e, § 2, cap. I). Por lo tanto, es justa la afirmación señalada en la pregunta, y se tiene

$$a=\sum_{\delta \diagdown a} \varphi\left(\frac{a}{\delta}\right)=\sum_{d \diagdown a} \varphi(d).$$

b, α) Sea $a=p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ la descomposición canónica del número a. En virtud de **a**, la función $\varphi(a)$ es multiplicativa, y se tiene

$$p_s^{\alpha_s}=\sum_{d \diagdown p_s^{\alpha_s}} \varphi(d), \quad p_s^{\alpha_s-1}=\sum_{d \diagdown p_s^{\alpha_s-1}} \varphi(d), \quad p_s^{\alpha_s}-p_s^{\alpha_s-1}=\varphi(p_s^{\alpha_s}).$$

β) Para un entero $m>0$ se tiene

$$m=\sum_{d \diagdown m} \varphi(d).$$

Por lo tanto

$$\varphi(a)=\sum_{d \diagdown a} \mu(d) \frac{a}{d}.$$

29. Se tiene (p recorre todos los números primos)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}=\prod_p \left(1+\frac{\varphi(p)}{p^s}+\frac{\varphi(p^2)}{p^{2s}}+\ldots\right)=$$

$$=\prod_p \frac{1-\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

30. Se tiene

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)=$$

$$=\sum_{d\setminus 1}\frac{\mu(d)}{d}+2\sum_{d\setminus 2}\frac{\mu(d)}{d}+\ldots+n\sum_{d\setminus n}\frac{\mu(d)}{d}=$$

$$=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left(1+2+\ldots+\left[\frac{n}{d}\right]\right)=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\frac{n^2}{2d^2}+O(n\ln n)=$$

$$=\frac{n^2}{2}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(n\ln n)=\frac{3}{\pi^2}n^2+O(n\ln n).$$

Respuestas a las preguntas del capítulo III

1, a. De

$$P=a_n10^{n-1}+a_{n-1}10^{n-2}+\ldots+a_1,$$

observando que $10\equiv 1$ (mód. 9), se tiene

$$P\equiv a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1 \text{ (mód. 9)}.$$

Por consiguiente, P es un múltiplo de 3 cuando, y sólo cuando, la suma de las cifras que le representan es un múltiplo de 3; P es un múltiplo de 9 cuando, y sólo cuando, la suma indicada es un múltiplo de 9. Observando que $10\equiv -1$ (mód. 11), se tiene

$$P\equiv(a_1+a_3+\ldots)-(a_2+a_4+\ldots) \text{ (mód. 11)}.$$

Por lo tanto, P es un múltiplo de 11 cuando, y sólo cuando, la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugares impares (contando desde la derecha) y la suma de las cifras que ocupan lugares pares, es un múltiplo de 11.

b. De

$$P=b_n100^{n-1}+b_{n-1}100^{n-2}+\ldots+b_1$$

debido a que $100\equiv -1$ (mód. 101), se tiene

$$P\equiv(b_1+b_3+\ldots)-(b_2+b_4+\ldots) \text{ (mód. 101)}.$$

Por consiguiente, P es un múltiplo de 101 cuando, y sólo cuando, $(b_1+b_3+\ldots)-(b_2+b_4+\ldots)$ es un múltiplo de 101.

c. De

$$P=c_n1\,000^{n-1}+c_{n-1}1\,000^{n-2}+\ldots+c_1$$

debido a que $1\,000\equiv 1$ (mód. 37), se tiene

$$P\equiv c_n+c_{n-1}+\ldots+c_1 \text{ (mód. 37)}.$$

Por lo tanto, P es un múltiplo de 37 cuando, y sólo cuando, c_n+ $+c_{n-1}+\ldots+c_1$ es un múltiplo de 37.

Como $1\,000 \equiv -1$ (mód. $7\cdot 11\cdot 13$), se tiene

$$P \equiv (c_1 + c_3 + \ldots) - (c_2 + c_4 + \ldots) \pmod{7\cdot 11\cdot 13}.$$

Por ello, P es un múltiplo de uno de los números 7, 11, 13 cuando, y sólo cuando, $(c_1 + c_3 + \ldots) - (c_2 + c_4 + \ldots)$ es un múltiplo de este mismo número.

2, α) Cuando x recorre el sistema completo de restos respecto del módulo m, $ax + b$ también recorre el sistema completo; el resto mínimo no negativo r del número $ax + b$ recorre los valores $0, 1, \ldots, m-1$ De aquí que

$$\sum_x \left\{\frac{ax+b}{m}\right\} = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{r}{m} = \frac{1}{2}(m-1).$$

β) Aplicando el resultado de la pregunta 18, b, cap. II, se obtiene

$$\sum_\xi \left\{\frac{a\xi}{m}\right\} = \frac{\psi_1(m)}{m} = \frac{1}{2}\varphi(m).$$

3, a. Sea r el resto mínimo no negativo del número $ax + [c]$ respecto del módulo m. Se tiene

$$S = \sum_{r=0}^{m-1} \left\{\frac{r+\Phi(r)}{m}\right\},$$

donde $\varepsilon \leqslant \Phi(r) \leqslant \varepsilon + h$; $\varepsilon = \{c\}$. Si $m \leqslant 2h+1$ el teorema es evidente. Por lo tanto, consideraremos sólo el caso en que $m > 2h+1$. Haciendo

$$\left\{\frac{r+\Phi(r)}{m}\right\} - \frac{r}{m} = \delta(r),$$

se tiene $-1 + \frac{\varepsilon}{m} \leqslant \delta(r) \leqslant \frac{h+\varepsilon}{m}$ si $r = m - [h+\varepsilon], \ldots, m-1$; $\frac{\varepsilon}{m} \leqslant \delta(r) \leqslant \frac{h+\varepsilon}{m}$ en todos los demás casos. De aquí resulta que

$$-[h+\varepsilon] + \varepsilon \leqslant S - \frac{m-1}{2} \leqslant h + \varepsilon, \qquad \left|S - \frac{1}{2}m\right| \leqslant h + \frac{1}{2}.$$

b. Se tiene

$$S = \sum_{z=0}^{m-1} \left\{\frac{az+\psi(z)}{m}\right\};$$

$$\psi(z) = m(AM+B) + \frac{\lambda}{m}z.$$

Apliquemos el teorema de la pregunta a, haciendo $h=|\lambda|$. Entonces se obtiene el resultado señalado.

c. Se halla

$$\sum_{z=0}^{m-1}\left\{f(M)+\frac{az}{m}+\frac{\theta z}{m^2}+\frac{f''(M+z_0)}{2}z^2\right\};$$

$$0<z_0<m-1.$$

Aplicamos el teorema de la pregunta a, haciendo $h=1+\frac{k}{2}$. Entonces se obtiene el resultado indicado.

4. Desarrollemos A en fracción continua. Sea $Q_n=Q'$ el mayor de los denominadores de las fracciones reducidas, que no es superior a m. Se tiene (pregunta 4, b, cap. I)

$$A=\frac{P'}{Q'}+\frac{\theta'}{Q'm},\quad (P', Q')=1,\quad |\theta'|<1.$$

De las desigualdades $m<Q_{n+1}\leqslant(q_{n+1}+1)Q_n\leqslant CQ_n$, donde C es una constante, a la cual no superan todos los números q_s+1, para el mayor entero H' que cumple la condición $H'Q'\leqslant m$ se deduce que $H'<C$. Aplicando el teorema de la pregunta 3, b, se obtiene

$$\left|\sum_{x=M}^{M+H'Q'-1}\{Ax+B\}-\frac{1}{2}H'Q'\right|\leqslant\frac{3}{2}C.$$

Sea $m_1=m-H'Q'$. Si $m_1>0$, entonces, eligiendo los números Q'' y H'' en dependencia de m_1, del mismo modo que se eligieron antes los números Q' y H' en dependencia de m, se obtiene

$$\sum_{x=M_1}^{M_1+H''Q''-1}\left|\{Ax+B\}-\frac{1}{2}H''Q''\right|\leqslant\frac{3}{2}C,$$

donde aplicamos la notación $M_s=M_{s-1}+H^{(s)}Q^{(s)}$. Sea $m_2=m_1-H''Q''$. Si $m_2>0$, entonces, de un modo semejante a lo anterior, se halla

$$\left|\sum_{x=M_2}^{M_2+H'''Q'''-1}\{Ax+B\}-\frac{1}{2}H'''Q'''\right|<\frac{3}{2}C$$

etc., hasta que se llegue a un $m_k=0$. Entonces se obtiene $(H'Q'+H''Q''+\ldots+H^{(k)}Q^{(k)}=m)$

$$\left|\sum_{x=M}^{M+m-1}\{Ax+B\}-\frac{1}{2}m\right|<\frac{3}{2}Ck.$$

Los números Q', Q'', ..., $Q^{(k)}$ satisfacen a las condiciones

$$m \geqslant Q' > m_1 \geqslant Q'' > m_2 \geqslant \ldots > m_{k-1} \geqslant Q^{(k)} \geqslant 1.$$

De aquí que (pregunta 3, cap. I) $k = O(\ln m)$ y, por consiguiente, la fórmula indicada en la pregunta es cierta.

5, a. Designemos con S la suma que figura en el primer miembro. Sea $\tau = A^{\frac{1}{3}}$. Para $\tau \leqslant 40$ el teorema es evidente. Por lo tanto, supongamos que $\tau > 40$. Tomando $M_1 = [Q + 1]$, hallamos unos números a_1, m_1, θ_1 que cumplan las condiciones

$$f'(M_1) = \frac{a_1}{m_1} + \frac{\theta_1}{m_1\tau}; \quad 0 < m_1 \leqslant \tau, \quad (a_1, m_1) = 1, \quad |\theta_1| < 1.$$

Tomando $M_2 = M_1 + m_1$, del mismo modo hallamos los números a_2, m_2, θ_2: tomando $M_3 = M_2 + m_2$, hallamos los números a_3, m_3, θ_3; continuamos así hasta que se llegue a $M_{s+1} = M_s + m_s$ con la condición $0 \leqslant [R] - M_{s+1} < [\tau]$. Aplicando el teorema de la pregunta **3, c**, se obtiene

$$\left| S - \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \ldots + m_s + [R] + 1 - M_{s+1}) \right| <$$

$$< s\frac{k+3}{2} + \frac{1}{2}([R] + 1 - M_{s+1}),$$

$$\left| S - \frac{1}{2}(R - Q) \right| < s\frac{k+3}{2} + \frac{\tau+1}{2}.$$

La longitud del intervalo, para el cual

$$\frac{a}{m} - \frac{1}{m\tau} \leqslant f'(x) \geqslant \frac{a}{m} + \frac{1}{m\tau},$$

no es superior a $\frac{2A}{m\tau}$. Por consiguiente, con una misma fracción $\frac{a}{m}$ están ligados $\leqslant \frac{2A}{m^2\tau} + 1$ números m_1, m_2, ..., m_s. Sean a_1 y a_2 el valor mínimo y máximo de a que corresponden a un m dado.

Se tiene

$$\frac{a_2 - a_1}{m} - \frac{2}{m\tau} \leqslant \frac{k(R-Q)}{A}; \quad a_2 - a_1 + 1 \leqslant \frac{k(R-Q)m}{A} + 1{,}05.$$

Por consiguiente, con el m dado están ligados

$$< \left(\frac{2A}{m^2\tau} + 1\right)\left(\frac{k(R-Q)m}{A} + 1{,}05\right) =$$

$$= \frac{k(R-Q)}{\tau}\left(\frac{2}{m} + \frac{m}{\tau^2}\right)\left(\frac{2A}{m^2\tau} + 1\right) 1{,}05$$

números $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Sumando la última expresión respecto de todos los $m = 1, 2, \ldots, [\tau]$, se obtiene

$$s < \frac{k(R-Q)}{\tau}\left(2\ln\tau + 2 + \frac{\tau^2+\tau}{2\tau^2} + \frac{10A}{3\tau}1{,}05 < \right.$$

$$< \frac{k(R-Q)}{\tau}\ln A + \frac{7}{2}\frac{A}{\tau},$$

$$\left|S - \frac{1}{2}(R-Q)\right| < 2\frac{k^2(R-Q)}{\tau}\ln A + 8k\frac{A}{\tau}.$$

b. Se tiene

$$\left|\sum_{Q<x\leq R}\{f(x)+1-\sigma\} - \frac{1}{2}(R-Q)\right| < \Delta,$$

$$\left|\sum_{Q<x\leq R}\{f(x)\} - \frac{1}{2}(R-Q)\right| < \Delta,$$

de donde, haciendo $\delta(x) = \{f(x)+1-\sigma\} - \{f(x)\}$, hallamos

$$\left|\sum_{Q<x\leq R}\delta(x)\right| < 2\Delta.$$

Mas, si $\{f(x)\} < \sigma$ se tiene $\delta(x) = 1-\sigma$, y si $\{f(x)\} \geqslant \sigma$ se tiene $\delta(x) = -\sigma$. Por lo tanto, $|(1-\sigma)\psi(\sigma) - \sigma(R-Q-\psi(\sigma))| < 2\Delta$, de donde se obtiene la fórmula indicada.

6, a. Apliquemos la fórmula de la pregunta **1**, **c**, cap. **II**. Haciendo $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$, en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}}$ se tiene

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}, \quad f''(x) = \frac{-r^2}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{1}{r} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{\sqrt{8}}{r},$$

Por lo tanto (pregunta **8**, **a**, cap. **II**, pregunta **5**, **a**)

$$T = 4r + 8\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\sqrt{r^2-x^2}\,dx + 8\rho\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\frac{r}{\sqrt{2}} - 8\rho(0)\cdot r - 4\frac{r}{\sqrt{2}} -$$

$$-4\frac{r^2}{2} + 8\frac{r}{\sqrt{2}}\left\{\frac{r}{2}\right\} + O(r^{\frac{2}{3}}\ln r) = \pi r^2 + O(r^{\frac{2}{3}}\ln r).$$

b. Se tiene (preguntas **11**, **d** y **1**, **d**, cap. **II**)

$$\tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n) = 2\sum_{0<x\leq\sqrt{n}}\left[\frac{n}{x}\right] - [\sqrt{n}]^2.$$

Es suficiente considerar solamente el caso $n>64$. Dividamos el intervalo $X<x\leqslant\sqrt{n}$, donde $X=2n^{\frac{1}{3}}$, en $O(\ln n)$ intervalos de la forma $M<x\leqslant M'$, donde $M'\leqslant 2M$. Haciendo $f(x)=\frac{n}{x}$, en el intervalo $M<x\leqslant M'$ se tiene

$$f'(x)=-\frac{n}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2n}{x^3};$$

$$\frac{n}{4M^3}\leqslant f''(x)\leqslant\frac{8n}{4M^3}.$$

De aquí que (pregunta 5, a)

$$\sum_{M<x\leqslant M'}\left\{\frac{n}{x}\right\}=\frac{1}{2}(M'-M)+O\left(n^{\frac{1}{3}}\ln n\right),$$

$$\sum_{0<x\leqslant\sqrt{n}}\left\{\frac{n}{x}\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{n}+O\left(n^{\frac{1}{3}}(\ln n)^2\right).$$

Por otra parte (pregunta 8, b, cap. II)

$$\sum_{0<x\leqslant\sqrt{n}}\frac{n}{x}=En+\frac{1}{2}n\ln n+\rho(\sqrt{n})\sqrt{n}+O(1).$$

Por lo tanto

$$\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n)=2En+n\ln n+2\rho(\sqrt{n})\sqrt{n}-$$
$$-\sqrt{n}-n+2\sqrt{n}\{\sqrt{n}\}+O\left(n^{\frac{1}{3}}(\ln n)^2\right)=n(\ln n+2E-1)+$$
$$+O\left(n^{\frac{1}{3}}(\ln n)^2\right).$$

7. Supongamos que el sistema es irregular y sea s el mayor número entero que cumple la condición de que 2^s figura en una cantidad impar de números del sistema. Uno de estos últimos números lo sustituimos por otro menor, que contenga solamente aquellas potencias 2^s que figuran en una cantidad impar de números del sistema restante. Supongamos que el sistema es regular. Un número, que sea menor que alguno de los números T de este sistema, se diferencia de T al menos en una cifra en el sistema de numeración de base 2.

8, a. Agregando el número $H=3^n+3^{n-1}+\ldots+3+1$ a cada uno de los números, representados del modo indicado, se obtienen

los números que se pueden obtener si en la misma forma x_n, x_{n-1} . . . . . ., x_1, x_0 recorren los valores 0, 1, 2, o sea, se obtienen todos los números 0, 1, . . ., $2H$.

b. Del modo indicado se obtienen $m_1 m_2 \ldots m_k$ números que no son congruentes entre sí respecto del módulo $m_1 m_2 \ldots m_k$, puesto que de

$$x_1 + m_1 x_2 + m_1 m_2 x_3 + \ldots + m_1 m_2 \ldots m_{k-1} x_k \equiv$$
$$\equiv x'_1 + m_1 x'_2 + m_1 m_2 x'_3 + \ldots + m_1 m_2 \ldots m_{k-1} x'_k \; (\text{mód. } m_1 m_2 \ldots m_k)$$

se halla sucesivamente

$$x_1 \equiv x'_1 \; (\text{mód. } m_1), \quad x_1 = x'_1; \quad m_1 x_2 \equiv m_1 x'_2 \; (\text{mód. } m_1 m_2), \quad x_2 = x'_2;$$
$$m_1 m_2 x_3 \equiv m_1 m_2 x'_3 \; (\text{mód. } m_1 m_2 m_3), \quad x_3 = x'_3,$$

etc.

9, a. Del modo indicado se obtienen $m_1 m_2 \ldots m_k$ números que no son congruentes respecto del módulo $m_1 m_2 \ldots m_k$, puesto que de

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots + M_k x_k \equiv$$
$$\equiv M_1 x'_1 + M_2 x'_2 + \ldots + M_k x'_k \; (\text{mód. } m_1 m_2 \ldots m_k)$$

resultaría que (todo M_j, distinto de M_s, es un múltiplo de m_s)

$$M_s x_s \equiv M_s x'_s \; (\text{mód. } m_s), \quad x_s \equiv x'_s \; (\text{mód. } m_s), \quad x_s = x'_s.$$

b. Del modo indicado se obtienen $\varphi(m_1)\varphi(m_2)\ldots\varphi(m_k) = \varphi(m_1 m_2 \ldots m_k)$ números, los cuales, en virtud del teorema de la pregunta **a**, no son congruentes respecto del módulo $m_1 m_2 \ldots m_k$, y como $(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots + M_k x_k, \; m_s) = (M_s x_s, \; m_s) = 1$, son primos con $m_1 m_2 \ldots m_k$.

c. Según el teorema de la pregunta **a**, el número $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots + M_k x_k$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_k$ reccorren los sistemas completos de restos respecto de los módulos $m_1, m_2, \ldots, m_k$, recorre el sistema completo de restos respecto del módulo $m_1 m_2 \ldots m_k$. Este número es primo con $m_1 m_2 \ldots m_k$ cuando, y sólo cuando, $(x_1, m_1) = (x_2, m_2) = \ldots = (x_k, m_k) = 1$. De aquí que $\varphi(m_1 m_2 \ldots m_k) = \varphi(m_1)\varphi(m_2)\ldots\varphi(m_k)$.

d. Para obtener todos los números de la sucesión 1, 2, . . . p^α que son primos con p^α, se deben borrar los números de esta sucesión que son múltiplos de p, es decir, los números $p, 2p, \ldots, p^{\alpha-1}p$. Por lo tanto, $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$. De aquí y del teorema **c**, § 4, cap. II se deduce inmediatamente la expresión para $\varphi(\alpha)$.

10, a. La primera afirmación se deduce de

$$\left\{\frac{x_1}{m_1} + \ldots + \frac{x_k}{m_k}\right\} = \left\{\frac{M_1 x_1 + \ldots + M_k x_k}{m}\right\};$$

la segunda se deduce de

$$\left\{\frac{\xi_1}{m_1}+\ldots+\frac{\xi_k}{m_k}\right\}=\left\{\frac{M_1\xi_1+\ldots+M_k\xi_k}{m}\right\}.$$

b. Las fracciones

$$\left\{\frac{f_1(x_1, \ldots, w_1)}{m_1}+\ldots+\frac{f_k(x_k, \ldots, w_k)}{m_k}\right\}$$

coinciden con las fracciones

$$\left\{\frac{f_1(M_1x_1+\ldots+M_kx_k, \ldots, M_1w_1+\ldots+M_kw_k}{m_1}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{f_k(M_1x_1+\ldots+M_kx_k, \ldots, M_1w_1+\ldots+M_kw_k)}{m_k}\right\},$$

o sea, con las fracciones $\left\{\frac{f_1(x, \ldots, w)}{m_1}+\ldots+\frac{f_k(x, \ldots, w)}{m_k}\right\}$. De aquí se obtiene fácilmente la primera afirmación. La segunda se demuestra de un modo análogo.

11, a. Si a es un múltiplo de m, se tiene

$$\sum e^{2\pi i\frac{ax}{m}}=\sum_x 1=m.$$

Si a no es divisible por m, se tiene

$$\sum_x e^{2\pi i\frac{ax}{m}}=\frac{e^{2\pi i\frac{am}{m}}-1}{e^{2\pi i\frac{a}{m}}-1}=0.$$

b. Para α no entero, el primer miembro es igual a

$$\left|\frac{e^{2\pi i\alpha(M+P)}-e^{2\pi i\alpha M}}{e^{2\pi i\alpha}-1}\right|\leqslant\frac{1}{\operatorname{sen}\pi(\alpha)}\leqslant\frac{1}{h(\alpha)}$$

c. Según el teorema de la pregunta b, el primer miembro no es superior a T_m, donde

$$T_m=\sum_{a=1}^{m-1}\frac{1}{h\left(\frac{a}{m}\right)}.$$

Pero si m es impar

$$T_m<m\sum_{0<a<\frac{m}{2}}\ln\frac{2a+1}{2a-1}=m\ln m.$$

y si m es par

$$T_m < \frac{m}{2} \sum_{0<a\leq \frac{m}{2}} \ln\frac{2a+1}{2a-1} + \frac{m}{2} \sum_{0<a<\frac{m}{2}} \ln\frac{2a+1}{2a-1} < m \ln m.$$

Como $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, para $m \geqslant 6$ la cota $m \ln m$ se puede disminuir en

$$2\frac{m}{6} \sum_{0<a\leq\frac{m}{6}} \ln\frac{2a+1}{2a-1} = \frac{m}{3} \ln\left(2\left[\frac{m}{6}\right]+1\right).$$

La última expresión es $> \frac{m}{2}$ si $m \geqslant 12$ y es $> m$ si $m \geqslant 60$.

12, a. Supongamos que $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ es la descomposición canónica del número m. Haciendo $p_1^{\alpha_1} = m_1, \ldots, p_k^{\alpha_k} = m_k$, y conservando las notaciones de la pregunta **10, a**, se tiene

$$\sum_{\xi_1} e^{2\pi i \frac{\xi_1}{m_1}} \ldots \sum_{\xi_k} e^{2\pi i \frac{\xi_k}{m_k}} = \sum_{\xi} e^{2\pi i \frac{\xi}{m}}.$$

Pero, si $\alpha_s = 1$, se obtiene

$$\sum_{\xi_s} e^{2\pi i \frac{\xi_s}{m_s}} = \sum_{x_s} e^{2\pi i \frac{x_s}{m_s}} - 1 = -1.$$

Si $\alpha_s > 1$, haciendo $m_s = p_s m'_s$, se obtiene

$$\sum_{\xi_s} e^{2\pi i \frac{\xi_s}{m_s}} = \sum_{x_s} e^{2\pi i \frac{x_s}{m_s}} - \sum_{u=0}^{m'_s-1} e^{2\pi i \frac{u}{m'_s}} = 0.$$

b. Sea m entero, $m > 1$. Se tiene $\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{x}{m}} = 0$. La suma de los términos del primer miembro de esta igualdad que cumplen la condición $(x, m) = d$, es igual a $\mu\left(\frac{m}{d}\right)$, en virtud del teorema de la pregunta **a.**

c. Obtenemos

$$\sum_{\xi} e^{2\pi i \frac{\xi}{m}} = \sum_{d \backslash m} \mu(d) S_d,$$

donde, haciendo $m=m_0 d$, se tiene

$$S_d=\sum_{u=0}^{m_0-1} e^{2\pi i \frac{u}{m_0}}.$$

Esta suma es igual a 0 si $d<m$ e igual a 1 si $d=m$. De aquí resulta el teorema de la pregunta **a.**

d. Las igualdades se deducen de la pregunta **10, b.**

e. Se tiene

$$A(m_1)\ldots A(m_k)=m^{-r}\sum_{a_1}\ldots\sum_{a_k} S_{a_1,\, m_1}\ldots S_{a_k,\, m_k},$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ recorren los sistemas reducidos de restos respecto de los módulos $m_1, \ldots, m_k$. De aquí (pregunta **d**) se deduce inmediatamente la primera igualdad de la pregunta. La segunda igualdad se demuestra de un modo análogo.

13, a. Se tiene

$$\sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{nx}{p}}=\begin{cases} p, & \text{si } n \text{ es múltiplo de } p,\\ 0 & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

b. Desarrollando el producto que corresponde a un n dado resulta

$$\sum_{d\setminus a}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{x=0}^{d-1} e^{2\pi i \frac{nx}{d}}.$$

De aquí, sumando respecto de todos los $n=0, 1, \ldots, a-1$, se obtiene la expresión conocida para $\varphi(a)$.

14. La parte de la expresión del segundo miembro que corresponde a un valor de x que es divisor de a, es igual a 1; la parte que corresponde a un valor de x que no es divisor de a, es igual a 0. De aquí que la expresión en cuestión es igual al doble del número de divisores de a, menores que $\sqrt{a}$, más δ, es decir, es igual a $\tau(a)$.

15, a. Se tiene

$$(h_1+h_2)^p=$$
$$=h_1^p+\binom{p}{1}h_1^{p-1}h_2+\ldots+\binom{p}{p-1}h_1h_2^{p-1}+h_2^p\equiv h_1^p+h_2^p \pmod{p};$$
$$(h_1+h_2+h_3)^p\equiv(h_1+h_2)^p+h_3^p\equiv h_1^p+h_2^p+h_3^p \pmod{p}, \text{ etc.}$$

b. Haciendo $h_1=h_2=\ldots=h_a=1$, del teorema de la pregunta **a** se obtiene el teorema de Fermat.

c. Sea $(a, p)=1$. Para ciertos enteros $N_1, N_2, \ldots, N_\alpha$, se tiene

$$a^{(p-1)}=1+N_1p,\quad a^{p(p-1)}=(1+N_1p)^p=1+N_2p^2,$$
$$a^{p^2(p-1)}=1+N_3p^3,\ \ldots,\ a^{p^{\alpha-1}(p-1)}=1+N_\alpha p^\alpha,$$
$$a^{\varphi(p^\alpha)}\equiv 1 \pmod{p^\alpha}.$$

Sea $m=p_{1}^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ la descomposición canónica del número m. Se tiene

$$a^{\varphi(p_1^{\alpha_1})}\equiv 1\ (\text{mód. } p_1^{\alpha_1}),\ \dots,\ a^{\varphi(p_k^{\alpha_k})}\equiv 1(\text{mód. } p_k^{\alpha_k})$$
$$a^{\varphi(m)}\equiv 1\ (\text{mód. } p_1^{\alpha_1}),\ \dots,\ a^{\varphi(m)}\equiv 1\ (\text{mód. } p_k^{\alpha_k}),$$
$$a^{\varphi(m)}\equiv 1\ (\text{mód. } m).$$

Respuestas a las preguntas del capítulo IV

1, a. El teorema se deduce inmediatamente del teorema de la pregunta **11, a**, cap. **III**.

b. Sea d un divisor del número m, $m=m_0d$, H_d denota la suma de los términos que cumplen la condición $(a, m)=d$ en la expresión para Tm de la pregunta **a**. Se obtiene

$$H_d=\sum_{a_0}\sum_{x=0}^{m-1}\dots\sum_{w=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{a_0f(x,\ \dots,\ w)}{m_0}}$$

donde a_0 recorre el sistema reducido de restos respecto del módulo m_0. De aquí se deduce que

$$H_d=d^r\sum_{a_0}\sum_{x_0=0}^{m_0-1}\dots\sum_{w_0=0}^{m_0-1}e^{2\pi i\frac{a_0f(x_0\dots w_0)}{m_0}}=m^rA(m_0).$$

c. Supongamos que $m>0$, $(a, m)=d$, $a=a_0d$, $m=m_0d$, T es la cantidad de soluciones de la congruencia $ax\equiv b$ (mód. m). Se tiene

$$T_m=\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{x=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{\alpha(ax-b)}{m}}=\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{x=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{\alpha a_0}{m_0}x-2\pi i\frac{b\alpha}{m}}=$$
$$=m\sum_{\alpha_1=0}^{d-1}e^{-2\pi i\frac{b\alpha_1}{d}}=\begin{cases} md, \text{ si } b \text{ es múltiplo de } d,\\ 0 \text{ en caso contrario.}\end{cases}$$

d. Haciendo $(a, m)=d_1$, $(b, d_1)=d_2$, $\dots$, $(f, d_{r-1})=d_r$, $m=d_1m_1$, $d_1=d_2m_2$, $\dots$, $d_{r-1}=d_rm_r$, hallamos $d=d_r$,

$$T_m=\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{x=0}^{m-1}\sum_{y=0}^{m-1}\dots\sum_{w=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{\alpha(ax+by+\dots+fw+g)}{m}}=$$
$$=m\sum_{\alpha_1=0}^{d_1-1}\sum_{y=0}^{m-1}\dots\sum_{w=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{\alpha_1(by+\dots+fw+g)}{d_1}}=$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$=m^{r-1}\sum_{\alpha_{r-1}=0}^{d_{r-1}-1}\sum_{w=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{\alpha_{r-1}(fw+g)}{d_{r-1}}}=m^r\sum_{\alpha_r=0}^{d_r-1}e^{2\pi i\frac{\alpha_rg}{d_r}}.$$

e. Apliquemos el método de inducción. Conservando las notaciones de la pregunta **d**, supongamos que el teorema es válido para r variables. Consideremos la congruencia

$$lv + ax + \ldots + fw + g \equiv 0 \pmod{m}. \qquad (2)$$

Sea $(l, m) = d_0$. La condición para que sea posible la congruencia (2), es $ax + \ldots + fw + g \equiv 0 \pmod{d_0}$. La última congruencia es posible solamente si g es múltiplo de d', donde $d' = (a, \ldots, f, d_0) = (l, a, \ldots, f, m)$; en este caso, ésta admite $d_0^{r-1}d'$ soluciones. Por consiguiente, la congruencia (2) es posible solamente en el caso en que g es múltiplo de d'; entonces, ésta admite $d_0^{r-1}d' \left(\frac{m}{d_0}\right)^r d_0 = m^r d'$ soluciones. Por lo tanto, el teorema también es válido para $r + 1$ variables. Pero el teorema subsiste para una variable. Esto significa que éste siempre es válido.

2, a. Se tiene $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, $a \cdot ba^{\varphi(m)-1} \equiv b \pmod{m}$.

b. Se tiene

$$1 \cdot 2 \ldots (a-1)\, ab\, (-1)^{a-1} \frac{(p-1) \ldots (p-a+1)}{1 \cdot 2 \ldots a} \equiv$$
$$\equiv b \cdot 1 \cdot 2 \ldots (1-a) \pmod{p},$$

de donde, dividiendo término a término por $1 \cdot 2 \ldots (a-1)$, se obtiene el teorema indicado.

c. α) Evidentemente, es suficiente limitarnos al caso $(2, b) = 1$. Eligiendo el signo de un modo adecuado, se tiene $b \pm m \equiv 0 \pmod{4}$. Sea 2^δ la máxima potencia de 2 que divide a $b \pm m$. Si $\delta \geqslant k$, se tiene

$$x \equiv \frac{b \pm m}{2^k} \pmod{m}.$$

Si $\delta < k$, se tiene

$$2^{k-\delta}x \equiv \frac{b \pm m}{2^\delta} \pmod{m}.$$

Con esta congruencia repetimos una operación análoga, etc.

β) Suponemos que $(3, b) = 1$. Eligiendo el signo de un modo adecuado, se tiene $b \pm m \equiv 0 \pmod{3}$. Sea 3^δ la máxima potencia de 3 que divide a $b \pm m$. Si $\delta \geqslant k$, se tiene

$$x \equiv \frac{b \pm m}{3^k} \pmod{m}.$$

Si $\delta < k$, se tiene

$$3^{k-\delta}x \equiv \frac{b \pm m}{2^\delta} \pmod{m}.$$

Con esta congruencia repetimos una operación análoga, etc.

γ) Sea p un divisor primo de a. Hallemos t de la condición $b+mt \equiv 0$ (mód. p). Sea p^{δ} la máxima potencia de p que divide a $(a, b+mt)$, y sea $a=a_1p^{\delta}$. Se tiene

$$a_1x \equiv \frac{b+mt}{p^{\delta}} \text{ (mód. } m).$$

Si $a_1 > 1$, repetimos una operación análoga con esta nueva congruencia, etc.

El método indicado es cómodo en el caso en que el número a posea factores primos no muy grandes.

3. Haciendo $t=[\tau]$, escribimos las congruencias

$$a\cdot 0 \equiv 0 \text{ (mód. } m),$$
$$a\cdot 1 \equiv y_1 \text{ (mód. } m),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a\cdot t \equiv y_t \text{ (mód. } m),$$
$$a\cdot 0 \equiv m \text{ (mód. } m).$$

Colocando estas congruencias en orden de crecimiento de sus segundos miembros (compárese con la pregunta **4**, **a**, cap. **II**) y restando término a término cada congruencia (a excepción de la última) de la que le sigue, se obtienen $t+1$ congruencias de la forma $az \equiv u$ (mód. m); $0 < |z| \leqslant \tau$. En este caso, al menos en una congruencia será $0 < u < \frac{m}{\tau}$.

En efecto, u admite $t+1 > \tau$ valores, estos valores son positivos, y su suma es igual a m.

4, **a**, α) Se deduce de la definición de fracción simbólica.

β) Aquí se puede hacer $b_0=b+mt$, donde t se define por la condición $b+mt \equiv 0$ (mód. a); entonces, satisface a la congruencia $ax \equiv b$ el número entero, representado por la fracción ordinaria $\frac{b_0}{a}$.

γ) Se tiene (b_0 es un múltiplo de a, d_0 es un múltiplo de c)

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c} \equiv \frac{b_0}{c}+\frac{d_0}{c}=\frac{b_0c+ad_0}{ac} \equiv \frac{bc+ad}{ac}.$$

δ) Se tiene

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c} \equiv \frac{b_0}{a}\cdot\frac{d_0}{c}=\frac{b_0d_0}{ac} \equiv \frac{bd}{ac}.$$

b, α) Se tiene (las congruencias se toman respecto del módulo p)

$$\binom{p-1}{a}=\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-a)}{1\cdot 2\ldots a} \equiv \frac{(-1)^a 1\cdot 2\ldots a}{1\cdot 2\ldots a} \equiv (-1)^a.$$

La pregunta **2**, **b** se resuelve más fácilmente así:

$$\frac{b}{a} \equiv \frac{b(-1)^{a-1}(p-1)\dots(p-(a-1))}{1\cdot 2\dots(a-1)a} \pmod{p}.$$

β) Se tiene

$$\frac{2^p-2}{p} \equiv 1+\frac{p-1}{1\cdot 2}+\frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots$$

$$\dots+\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-(p-2))}{1\cdot 2\dots(p-1)} \pmod{p}.$$

5, a. Entre los números s, $s+1$, ..., $s+n-1$, ningún par puede tener simultáneamente divisores comunes con d. Los productos $s(s+1)\dots(s+n-1)$ pueden ser reunidos en $n^{\varkappa}$ clases según la cantidad de modos con que el número d pueda dividirse en n factores primos entre sí, teniendo en cuenta el orden de estos últimos (pregunta **11**, **b**, cap. **II**). Sea $d = u_1u_2\dots u_n$ una de tales divisiones. La cantidad de productos con la condición $s \equiv 0 \pmod{u_1}$, $s+1 \equiv$ $\equiv 0 \pmod{u_2}$, ..., $s+n-1 \equiv 0 \pmod{u_n}$ es igual a $\frac{a}{b}$. Por lo tanto, el número buscado es igual a $n^{\varkappa}\frac{a}{d}$.

b. El número indicado es igual a

$$\sum_{d \diagdown a} \mu(d) S_d; \quad S_d = \frac{n^{\varkappa}a}{d},$$

donde $\varkappa$ es igual a la cantidad de divisores primos del número d. Pero, se tiene

$$\sum_{d \diagdown a} \mu(d)\frac{n^{\varkappa}a}{d} = a\left(1-\frac{n}{p_1}\right)\left(1-\frac{n}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{n}{p_k}\right).$$

6, a. Todos los valores de x que satisfacen a la primera congruencia vienen dados por la igualdad $x = b_1 + m_1t$, donde t es entero. Para elegir entre éstos aquellos que satisfacen también a la segunda congruencia, hay que limitarse solamente a aquellos valores de t que satisfacen a la congruencia

$$m_1t \equiv b_2 - b_1 \pmod{m_2}.$$

Pero esta congruencia es resoluble cuando, y sólo cuando, $b_2 - b_1$ es múltiplo de d. Además, cuando ésta es resoluble, el conjunto de valores t que la satisfacen se determina por una igualdad de la forma $t = t_0 + \frac{m_3}{d}t'$, donde t' es entero; el conjunto de valores x que satisface

al sistema considerado en la pregunta se determina por la igualdad

$$x=b_1+m_1\left(t_0+\frac{m^2}{d}t'\right)=x_{1,2}+m_{1,2}t';$$

$$x_{1,2}=b_1+m_1t_0.$$

b. Si el sistema

$$x\equiv b_1\ (\text{mód. } m_1),\quad x\equiv b_2\ (\text{mód. } m_2)$$

es resoluble, el conjunto de valores x que le satisface se expresa por una congruencia de la forma $x\equiv x_{1,2}$ (mód. $m_{1,2}$). Si el sistema

$$x\equiv x_{1,2}\ (\text{mód. } m_{1,2}),\quad x\equiv b_3\ (\text{mód. } m_3)$$

es resoluble, el conjunto de valores x que le satisface se expresa por una congruencia de la forma $x\equiv x_{1,2,3}$ (mód. $m_{1,2,3}$). Si el sistema

$$x\equiv x_{1,2,3}\ (\text{mód. } m_{1,2,3}),\quad x\equiv b_4\ (\text{mód. } m_4)$$

es resoluble, el conjunto de valores x que le satisface se expresa por una congruencia de la forma $x\equiv x_{1,2,3,4}$ (mód. $m_{1,2,3,4}$), etc.

7, α) Al sustituir x por $-x$ (en virtud de lo cual x' se sustituye por $-x'$) el valor de la suma $\left(\frac{a,\ b}{m}\right)$ no varía.

β) Cuando x recorre el sistema reducido de restos respecto del módulo m, x' también recorre el sistema reducido de restos respecto del módulo m.

γ) Haciendo $x\equiv hz$ (mód. m), resulta

$$\left(\frac{a,\ bh}{m}\right)=\sum_z e^{2\pi i\frac{ahz+bz'}{m}}=\left(\frac{ah,\ b}{m}\right).$$

δ) Se tiene

$$\left(\frac{a_1,\ 1}{m_1}\right)\left(\frac{a_2,\ 1}{m_2}\right)=\sum_x\sum_y e^{2\pi i\frac{a_1m_2x+a_2m_1y+m_2x'+m_1y'}{m_1m_2}}.$$

Haciendo $m_2x'+m_1y'=z'$, se tiene

$$(a_1m_2x+a_2m_1y)(m_2x'+m_1y')\equiv a_1m_2^2+a_2m_1^2\ (\text{mód. } m_1m_2),$$

$$\left(\frac{a_1,\ 1}{m_1}\right)\left(\frac{a_2,\ 1}{m_2}\right)=\left(\frac{m_2^2a_1+m_1^2a_2,\ 1}{m_1m_2}\right),$$

lo cual demuestra la propiedad indicada para el caso de dos factores. La generalización para el caso de más de dos factores es trivial.

8. La congruencia

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n-a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\equiv$$
$$\equiv 0\ (\text{mód. } p)$$

admite n soluciones. Su grado es inferior a n. Por consiguiente, todos sus coeficientes son múltiplos de p, lo cual se expresa mediante las congruencias indicadas en la pregunta.

9, a. Si $p > 3$, para cada x tomado de la sucesión 2, 3, . . ., $p - 2$, hallamos en esta sucesión un número correspondiente x', distinto del mismo x, que cumple la condición $xx' \equiv 1$ (mód. p); en efecto, si fuese $x = x'$ resultaría que $(x - 1)(x + 1) \equiv 0$ (mód. p); $x \equiv 1$ o $x \equiv p - 1$. Por consiguiente,

$$2 \cdot 3 \ldots (p - 2) \equiv 1 \pmod{p}; \quad 1 \cdot 2 \ldots (p - 1) \equiv -1 \pmod{p}.$$

b. Sea $P > 2$. Suponiendo que P posee un divisor u que cumple la condición $1 < u < P$, se tendría que $1 \cdot 2 \ldots (P - 1) + 1 \equiv$ $\equiv 1$ (mód. u).

10. a. Hallamos un número h que cumpla la condición $a_0 h \equiv 1$ (mód. m). La congruencia dada equivale a la que sigue:

$$x^n + a_1 h x^{n-1} + \ldots + a_n h \equiv 0 \pmod{m}.$$

b. Sea $Q(x)$ el cociente y $R(x)$ el residuo de la división de $x^p - x$ por $f(x)$. Todos los coeficientes de $Q(x)$ y $R(x)$ son enteros. $Q(x)$ es de grado $p - n$, $R(x)$ es de grado inferior a n,

$$x^p - x = f(x)\, Q(x) + R(x).$$

Supongamos que la congruencia $f(x) \equiv 0$ (mód. p) posee n soluciones. Estas mismas soluciones son también soluciones de la congruencia $R(x) \equiv 0$ (mód. p). Por lo tanto, todos los coeficientes de $R(x)$ son múltiplos de p.

Recíprocamente, supongamos que todos los coeficientes de $R(x)$ son múltiplos de p. Entonces $f(x)\, Q(x)$ es múltiplo de p para los mismos valores de x que $x^p - x$; por lo tanto, la suma de los números de soluciones de las congruencias

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}, \qquad Q(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

no es menor que p. Supongamos que la primera admite α soluciones y la segunda β soluciones. De

$$\alpha \leqslant n, \ \beta \leqslant p - n, \ p \leqslant \alpha + \beta$$

deducimos que $\alpha = n$, $\beta = p - n$.

c. Elevando término a término la congruencia dada a la potencia $\frac{p-1}{n}$, nos convencemos de que la condición indicada es necesaria Supongamos que se cumple esta condición; de

$$x^p - x = x\left(x^{p-1} - A^{\frac{p-1}{n}} + A^{\frac{p-1}{n}} - 1\right)$$

se deduce que el residuo de la división de $x^p - x$ por $x^n - A$ es igual a $\left(A^{\frac{p-1}{n}} - 1\right)x$, donde $A^{\frac{p-1}{n}} - 1$ es múltiplo de p.

11. De $x_0^n \equiv A$ (mód. m), $y^n \equiv 1$ (mód. m) se deduce que $(x_0y)^n \equiv$ $\equiv A$(mód. m); ahora bien, los productos x_0y que corresponden a valores de y incongruentes (respecto del módulo m), son incongruentes. De $x_0^n \equiv A$ (mód. m), $x^n \equiv A$ (mód. m) se deduce que $x^n \equiv x_0^n$ (mód. m) y, determinando y de la condición $x \equiv yx_0$ (mód. m), se tiene

$$y^n \equiv 1 \text{ (mód. } m).$$

Respuestas a las preguntas del capítulo V

1. La congruencia indicada es equivalente a la siguiente: $(2ax + b)^2 \equiv$ $\equiv b^2 - 4ac$ (mód. m). Para cada solución $z \equiv z_0$ (mód. m) de la congruencia $z^2 \equiv b^2 - 4ac$ (mód. m) hallamos de $2ax + b \equiv z_0$ (mód. m) una solución correspondiente de la congruencia indicada.

2, a. Si $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, se tiene $a^{2m+1} \equiv 1$ (mód. p), $(a^{m+1})^2 \equiv a$ (mód. p), $x \equiv \pm a^{m+1}$ (mód. p).

b. Si $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, se tiene $a^{4m+2} \equiv 1$ (mód. p), $a^{2m+1} \equiv \pm 1$ (mód. p), $a^{2m+2} \equiv \pm a$ (mód. p).

Como $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, también se tiene $2^{4m+2} \equiv -1$ (mód. p). Por lo tanto, para un s que toma uno de los valores 0; 1, resulta

$$a^{2m+2}\, 2^{(4m+2)s} \equiv a \text{ (mód. } p), \qquad x \equiv \pm a^{m+1}\, 2^{(2m+1)s} \text{ (mód. } p).$$

c. Sea $p = 2^k h + 1$, donde $k \geqslant 3$ y h es impar, $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$. Se tiene

$$a^{2^{k-1}h} \equiv 1 \text{ (mód. } p), \qquad a^{2^{k-2}h} \equiv \pm 1 \text{ (mód. } p),$$

$$N^{2^{k-1}h} \equiv -1 \text{ (mód. } p)$$

Por consiguiente, para cierto entero no negativo s_2, se obtiene

$$a^{2^{k-2}h} N^{s_2 2^{k-1}} \equiv 1 \text{(mód. } p) \qquad a^{2^{k-3}h} N^{s_2 2^{k-2}} \equiv \pm 1 \text{ (mód. } p);$$

de aquí, para cierto entero negativo s_3, se obtiene

$$a^{2^{k-3}h} N^{s_3 2^{k-2}} \equiv 1 \text{ (mód. } p), \qquad a^{2^{k-4}h} N^{s_3 2^{k-3}} \equiv \pm 1 \text{ (mód. } p),$$

etc.; finalmente, se obtiene

$$a^h N^{2s_k} \equiv 1 \text{ (mód. } p), \qquad x \equiv \pm a^{\frac{h+1}{2}} N^{s_k} \text{ (mód. } p).$$

d. Se tiene

$$1\cdot 2 \ldots 2m\,(p-2m) \ldots (p-2)\,(p-1)+1 \equiv 0 \pmod{p},$$
$$(1\cdot 2 \ldots 2m)^2+1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

3, a. Las condiciones de resolubilidad de las congruencias (1) y (2) se deducen trivialmente (**f**, § 2 y **k**, § 2). La congruencia (3) es resoluble cuando, y sólo cuando, $\left(\frac{-3}{p}\right)=1$. Pero $\left(\frac{-3}{p}\right)=\left(\frac{p}{3}\right)$ y

$$\left(\frac{p}{3}\right)=\begin{cases} 1, & \text{si } p \text{ es de la forma } 6m+1, \\ -1, & \text{si } p \text{ es de la forma } 6m+5. \end{cases}$$

b. Cualesquiera que sean los primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ de la forma $4m+1$, el divisor primo mínimo p del número $(2p_1p_2 \ldots p_k)^2+1$ es distinto de $p_1, p_2, \ldots, p_k$ y, como $(2p_1p_2 \ldots p_k)^2+1 \equiv 0 \pmod{p}$, es de la forma $4m+1$.

c. Cualesquiera que sean los primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ de la forma $6m+1$, el divisor primo mínimo p del número $(2p_1p_2 \ldots p_k)^2+3$ es distinto de $p_1, p_2, \ldots, p_k$ y, como $(2p_1p_2 \ldots p_k)^2+3 \equiv 0 \pmod{p}$, es de la forma $6m+1$.

4. En el primer conjunto hay números que son congruentes con $1\cdot 1, 2\cdot 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\frac{p-1}{2}$, o sea, con todos los restos cuadráticos del sistema completo; según la condición, un número que pertenece al segundo conjunto es un no-resto cuadrático. Pero al segundo conjunto pertenecen todos los productos de este no-resto por todos los restos, es decir, pertenecen todos los no-restos cuadráticos.

5, a. Supongamos que en el sistema de numeración de base p

$$a=a_{\alpha-1}p^{\alpha-1}+\ldots+a_1p+a_0$$

y que la solución buscada (el resto mínimo no negativo) es

$$x=x_{\alpha-1}p^{\alpha-1}+\ldots+x_1p+x_0. \qquad (1)$$

Formemos la tabla:

$a_{\alpha-1}$	$\ldots$	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$2x_0x_{\alpha-1}$	$\ldots$	$2x_0x_4$	$2x_0x_3$	$2x_0x_2$	$2x_0x_1$	x_0^2
$2x_1x_{\alpha-2}$	$\ldots$	$2x_1x_3$	$2x_1x_2$	x_1^2		
$2x_2x_{\alpha-3}$	$\ldots$	x_2^2				
$\ldots$						

donde en la columna bajo a_s figuran los números cuya suma engendra el coeficiente de p^s en el desarrollo del cuadrado del segundo miembro (1) según las potencias de p. Hallamos x_0 de la condición

$$x_0^2 \equiv a_0 \pmod{p}.$$

Haciendo $\frac{x_0^2 - a_0}{p} = p_1$, obtenemos x_1 de la condición

$$p_1 + 2x_0x_1 \equiv a_1 \pmod{p}.$$

Haciendo $\frac{p_1 + 2x_0x_1 - a_1}{p} = p_2$, obtenemos x_2 de la condición

$$p_2 + 2x_0x_2 + x_1^2 \equiv a_2 \pmod{p},$$

etc. Como $(x_0, p) = 1$, para el número x_0 dado, los números $x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha-1}$ se determinan unívocamente.

b. Aquí

$$a = a_{\alpha-1}2^{\alpha-1} + \ldots + a_32^3 + a_22^2 + a_12 + a_0,$$
$$x = x_{\alpha-1}2^{\alpha-1} + \ldots + x_32^3 + x_22^2 + x_12 + x_0.$$

y se tiene la tabla siguiente:

$a_{\alpha-1}$	...	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$x_0x_{\alpha-2}$	...	x_0x_3	x_0x_2	x_0x_1		x_0^2
$x_1x_{\alpha-3}$	...	x_1x_2		x_1^2		
$x_2x_{\alpha-4}$	...	x_2^2				
...	...					

Consideremos solamente el caso $\alpha \geqslant 3$. Como $(a, 2) = 1$, tiene que ser necesariamente $a_0 = 1$. Por lo tanto, $x_0 = 1$. Luego tiene que ser necesariamente $a_1 = 0$ y, como $x_0x_1 + x_1^2 = x_1 + x_1^2 \equiv 0 \pmod{2}$, tiene que ser necesariamente $a_2 = 0$. Para x_1 son posibles dos valores: 0 y 1. Los números $x_2, x_3, \ldots, x_{\alpha-2}$ se determinan unívocamente, y para $x_{\alpha-1}$ son posibles dos valores: 0 y 1. Por lo tanto, si $\alpha \geqslant 3$ tiene que ser necesariamente $a \equiv 1 \pmod{8}$, y entonces la congruencia indicada admite 4 soluciones.

6. Evidentemente, P y Q son enteros, y Q es congruente respecto del módulo p con el número que se obtiene al sustituir a por z^2, para lo cual es suficiente sustituir $\sqrt{a}$ por z. Por lo tanto, $Q \equiv 2^{\alpha-1}z^{\alpha-1}$ (mód. p); por consiguiente, $(Q, p) = 1$ y Q' verdaderamente se puede determinar de la congruencia $QQ' \equiv 1$ (mód. p^{α}). Se tiene

$$P^2-aQ^2=(z+\sqrt{a})^{\alpha}(z-\sqrt{a})^{\alpha}=(z^2-a)^{\alpha}\equiv 0 \text{ (mód. } p^{\alpha}),$$

de donde

$$(PQ')^2 \equiv a\,(QQ')^2 \equiv a \text{ (mód. } p^{\alpha}).$$

7. Sea $m=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\ldots, p_k^{\alpha_k}$ la descomposición canónica del número m. Entonces m se expresa de 2^k maneras en la forma $m=2^{\alpha}ab$, donde $(a, b)=1$.
Supongamos que $\alpha = 0$. De $(x-1)(x+1) \equiv 0$ (mód. m) se deduce que para ciertos a y b.

$$x \equiv 1 \text{ (mód. } a); \quad x \equiv -1 \text{ (mód. } b).$$

Resolviendo este sistema se obtiene $x \equiv x_0$ (mód. m). Por lo tanto, la congruencia indicada tiene 2^k soluciones.
Supongamos que $\alpha = 1$. Para ciertos a y b

$$x \equiv 1 \text{ (mód. } 2a); \quad x \equiv -1 \text{ (mód. } 2b).$$

Resolviendo este sistema se obtiene $x \equiv x_0$ (mód. m). Por lo tanto, la congruencia indicada tiene 2^k soluciones.
Supongamos que $\alpha = 2$. Para ciertos a y b

$$x \equiv 1 \text{ (mód. } 2a); \quad x \equiv -1 \text{ (mód. } 2b).$$

Resolviendo este sistema se obtiene $x \equiv x_0 \left(\text{mód. } \frac{m}{2}\right)$. Por lo tanto, la congruencia indicada tiene 2^{k+1} soluciones.
Supongamos que $\alpha \geqslant 3$. Para ciertos a y b tiene que verificarse uno de los sistemas

$$x \equiv 1 \text{ (mód. } 2a); \quad x \equiv -1 \text{ (mód. } 2^{\alpha-1}b);$$

$$x \equiv 1 \text{ (mód. } 2^{\alpha-1}a); \quad x \equiv -1 \text{ (mód. } 2b).$$

Resolviendo uno de estos sistemas se obtiene $x \equiv x_0 \left(\text{mod} \frac{m}{2}\right)$. Por lo tanto, la congruencia indicada tiene 2^{k+2} soluciones.
8. a. Determinando x de la congruencia $xx' \equiv 1$ (mód. p), se tiene

$$\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x(x+k)}{p}\right)=\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{xx'(xx'+kx')}{p}\right)=\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{1+kx'}{p}\right).$$

Evidentemente, $1+kx'$ recorre todos los restos del sistema completo, a excepción de 1. De aquí se deduce el teorema indicado.

b. La igualdad en cuestión se deduce de la igualdad

$$T=\frac{1}{4}\sum_{x=1}^{p-2}\left(1+\varepsilon\left(\frac{x}{p}\right)\right)\left(1+\eta\left(\frac{x+1}{p}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{x=1}^{p-2}\left(1+\varepsilon\left(\frac{x}{p}\right)+\eta\left(\frac{x+1}{p}\right)+\varepsilon\eta\left(\frac{x(x+1)}{p}\right)\right).$$

c. Supongamos que δ denota la cantidad de valores de y que son iguales a cero (por consiguiente, $\delta=0$ ó $\delta=1$). Se tiene

$$S^2\leqslant X\sum_{y_1}\sum_{y}S_{y_1,\,y};\ S_{y_1,\,y}=\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{(xy+k)\,(xy_1+k)}{p}\right).$$

Ahora hallamos que:

$S_{y_1,\,y}=p$, si $y_1=y=0$;

$S_{y_1,\,y}=0$, si solamente uno de los números y_1 e y es igual a cero;

$S_{y_1,\,y}=p-1=p-\left(\frac{y_1y}{p}\right)$, si $y_1=y>0$;

$S_{y_1,\,y}=-\left(\frac{y_1y}{p}\right)$ en los demás casos.

Por lo tanto,

$$S^2\leqslant X\left(p\delta+p(Y-\delta)-\left(\sum_{y>0}\left(\frac{y}{p}\right)\right)^2\right)\leqslant XYp.$$

d. α) Se tiene

$$S=\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{z_1=0}^{Q-1}\sum_{z=0}^{Q-1}\left(\frac{(x+z_1)\,(x+z)}{p}\right).$$

Para $z_1=z$, la sumación respecto de x da $p-1$. Para z_1 distinto de z, la sumación respecto de x (pregunta a) da -1. Por lo tanto, $S=$ $=pQ-Q^2$.

β) Según el teorema de la pregunta α), se tiene

$$T\,(Q^{0,5+0,5\lambda})^2\leqslant S<pQ;\qquad T<pQ^{-\lambda}.$$

γ) Si $p\leqslant 5$, el teorema es trivial. Si $p>5$, aplicamos el teorema de la pregunta α). Suponiendo que en la sucesión indicada en la pregunta

no hay no-restos cuadráticos, llegamos a la conclusión que $S_x = Q$ para $x = M$, $M + 1, \ldots, M + Q$. Por lo tanto ($Q^2 + 2Q$ y $Q^2 + 2Q + 1$ no son iguales a p, puesto que son compuestos), hallamos

$$(Q + 1)\, Q^2 \leqslant (p - Q)\, Q, \quad Q^2 + 2Q < p, \quad (Q + 1)^2 < p,$$

lo cual es imposible.

9, a. Si m se expresa en la forma (1), la solución

$$z \equiv z_0 \ (\text{mód. } m) \tag{5}$$

de la congruencia $x \equiv zy$ (mód. m) también es solución de la congruencia (2). Diremos que la expresión indicada está ligada con la solución (5) de la congruencia (2).

Con cada solución (5) de la congruencia (2) está ligada no menos de una expresión (1). En efecto, tomando $\tau = \sqrt{m}$, se tiene

$$\frac{z_0}{m} = \frac{P}{Q} + \frac{\theta}{Q\sqrt{m}}; \quad (P, Q) = 1, \ 0 < Q \leqslant \sqrt{m}, \quad |\theta| < 1.$$

Por lo tanto, $z_0 Q = mP + r$, donde $|r| < \sqrt{m}$. Luego, de (2) se deduce que $|r|^2 + Q^2 \equiv 0$ (mód. m). De aquí y de $0 < |r|^2 + Q^2 < 2m$ se obtiene

$$m = |r|^2 + Q^2. \tag{6}$$

Ahora bien, $(|r|, Q) = 1$, puesto que

$$1 = \frac{r^2 + Q^2}{m} = \frac{(z_0 Q - mP)\, z_0 Q - rmP + Q^2}{m} \equiv -rP \ (\text{mód. } Q).$$

Si $|r| = r$, $r \equiv z_0 Q$ (mód. m), la expresión (6) está ligada con la solución (5). Si $|r| = -r$, como $z_0^2 Q \equiv z_0 r$ (mód. m), $Q \equiv z_0 |r|$ (mód. m), la expresión $m = Q^2 + |r|^2$ está ligada con la solución (5). Con cada solución (5) está ligada no más de una expresión (1). En efecto, si dos expresiones del número m en la forma (1), $m = x^2 + y^2$ y $m = x_1^2 + y_1^2$, están ligadas con una solución (5), entonces, de $x \equiv z_0 y$ (mód. m), $x_1 \equiv z_0 y_1$ (mód. m) se deduce que $xy_1 \equiv x_1 y$ (mód. m). Por lo tanto, $xy_1 = x_1 y$, y como $(x, y) = (x_1, y_1) = 1$, resulta que $x = x_1$, $y = y_1$.

b. Si p se expresa en la forma (3), la solución

$$z \equiv z_0 \ (\text{mód. } p) \tag{7}$$

de la congruencia $x \equiv zy$ (mód. p) también es solución de la congruencia (4). Diremos que la expresión indicada está ligada con la solución (7) de la congruencia (4).

Conociendo la solución (7) de la congruencia (4), hallamos no menos de una expresión (3). En efecto, tomado $\tau = \sqrt{p}$, se tiene

$$\frac{z_0}{p} = \frac{P}{Q} + \frac{\theta}{Q\sqrt{p}}; \quad (P, Q) = 1, \ 0 < Q \leqslant \sqrt{p}, \ |\theta| < 1.$$

Por lo tanto, $z_0 Q \equiv r$ (mód. p), donde $|r| < \sqrt{p}$. Luego, de (4) se deduce que $|r|^2 + aQ^2 \equiv 0$ (mód. p). De aquí y de $0 < |r|^2 + aQ^2 < (1 + a)p$ se deduce que, si $a = 2$, tiene que ser $|r|^2 + 2Q^2 = p$ ó $|r|^2 + 2Q^2 = 2p$. En el último caso $|r|$ es par, $|r| = 2r_1$, $p = Q^2 + 2r_1^2$. Si $a = 3$, tiene que ser $|r|^2 + 3Q^2 = p$, ó $|r|^2 + 3Q^2 = 2p$, ó $|r|^2 + 3Q^2 = 3p$. El segundo caso es imposible, pues, respecto del módulo 4 el primer miembro es congruente con 0, mientras que el segundo miembro es congruente con 2. En el tercer caso, $|r|$ es múltiplo de 3, $|r| = 3r_1$, $p = Q^2 + 3r_1^2$. Suponiendo que dos expresiones del número p en la forma (3), $p = x^2 + ay^2$ y $p = x_1^2 + ay_1^2$, están ligadas con una misma solución de la congruencia (4), hallamos que $x = x_1$, $y = y_1$. Suponiendo que estas expresiones están ligadas con soluciones distintas de la congruencia (4), hallamos que $x \equiv zy$ (mód. p), $x_1 \equiv -zy_1$ (mód. p), de donde $xy_1 + x_1 y \equiv 0$ (mód. p), lo cual es imposible, puesto que

$$0 < (xy_1 + x_1 y)^2 \leqslant (x^2 + y^2)(x_1^2 + y_1^2) < p^2$$

c, α) Los términos de la suma $S(k)$ con $x = x_1$ y $x = -x_1$ son iguales.
β) Se tiene

$$S(kt^2) = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{xt(x^2t^2 + kt^2)}{p}\right) = \left(\frac{t}{p}\right) S(k).$$

γ) Haciendo $p - 1 = 2p_1$, se tiene

$$p_1(S(r))^2 + p_1(S(n))^2 = \sum_{t=1}^{p_1} (S(rt^2))^2 + \sum_{t=1}^{p_1} (S(nt^2))^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} S(k)^2 = \sum_{x=1}^{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{xy(x^2+k)(y^2+k)}{p}\right).$$

Si y no es igual a x o a $p - x$, el resultado de la sumación respecto de k es igual a $-\left(\frac{xy}{p}\right)$; si $y = x$ o $y = p - x$ éste es igual a $(p-1)\times\left(\frac{xy}{p}\right)$. Por lo tanto,

$$p_1(S(r))^2 + p_1(S(n))^2 = 4pp_1. \ p = \left(\frac{1}{2}S(r)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}S(n)\right)^2$$

10, a. Se tiene

$$X^2-DY^2=(x_1+y_1\sqrt{D})(x_2\pm y_2\sqrt{D})(x_1-$$
$$-y_1\sqrt{D})(x_2\pm y_2\sqrt{D})=k^2.$$

b. Tomando cualquier τ_1 que cumpla la condición $\tau_1>1$, hallamos unos enteros x_1, y_1 que cumplen la condición $|y_1\sqrt{D}-x_1|<\frac{1}{\tau_1}$, $0\leqslant y_1\leqslant\tau_1$, de donde, multiplicando término a término por $y_1\sqrt{D}+x_1<2y_1\sqrt{D}+1$, obtenemos $|x_1^2-Dy_1^2|<2\sqrt{D}+1$. Tomando $\tau_2>\tau_1$ de modo que sea $|y_1\sqrt{D}-x_1|>\frac{1}{\tau_2}$, hallamos unos nuevos enteros x_2, y_2 que cumplen la condición $|x_2^2-Dy_2^2|<2\sqrt{D}+1$, etc. De aquí se deduce que en el intervalo $-2\sqrt{D}-1<k<2\sqrt{D}+1$ existe un entero k, distinto de cero, tal que entre los pares x_1, y_1; x_2, y_2;.. hay un conjunto infinito de pares x, y que cumplen la condición $x^2-Dy^2=k$; entre estos últimos siempre habrá dos pares ξ_1, η_1 y ξ_2, η_2 que satisfacen a la condición $\xi_1\equiv\xi_2$ (mód. $|k|$), $\eta_1\equiv\equiv\eta_2$ (mód. $|k|$). Determinando los enteros ξ_0, η_0 mediante la igualdad $\xi_0+\eta_0\sqrt{D}=(\zeta_1+\eta_1\sqrt{D})(\xi_2-\eta_2\sqrt{D})$, se tiene (pregunta a)

$$\xi_0^2-D\eta_0^2=|k|^2,\ \xi_0\equiv\xi_1^2-D\eta_1^2\equiv 0\ (\text{mód. }|k|);$$
$$\eta_0\equiv-\zeta_1\eta_1+\xi_1\eta_1\equiv 0\ (\text{mód. }|k|).$$

Por lo tanto, $\xi_0=\xi|k|$, $\eta_0=\eta|k|$, donde ξ y η son enteros y $\xi^2-D\eta^2=1$.

c. Los números x, y que se determinan por la igualdad (2) satisfacen (pregunta a) a la ecuación (1).

Suponiendo que existe un par de enteros positivos x, y que satisfacen a la ecuación (1), pero distinto de los pares que se determinan por la igualdad (2), para cierto $r=1, 2, \ldots$ tendremos

$$(x_0+y_0\sqrt{D})^r<x+y\sqrt{D}<(x_0+y_0\sqrt{D})^{r+1}.$$

De aquí, dividiendo término a término por $(x_0+y_0\sqrt{D})^r$, obtenemos

$$1<X+Y\sqrt{D}<x_0+y_0\sqrt{D},\tag{3}$$

donde (pregunta a) X e Y son enteros que se determinan por la igualdad

$$X+Y\sqrt{D}=\frac{x+y\sqrt{D}}{(x_0+y_0\sqrt{D})^r}=(x+y\sqrt{D})(x_0-y_0\sqrt{D})^r$$

y satisfacen a la ecuación

$$X^2-DY^2=1.\tag{4}$$

Pero de (4) se deducen las desigualdades $0 < X - Y\sqrt{D} < 1$, las cuales, junto con la primera desigualdad (3), muestran que X e Y son positivos. Por lo tanto, la segunda desigualdad (3) contradice a la difinición de los números x_0, y_0.

11, a, α) Se tiene

$$|U_{a,p}|^2 = U_{a,p}\overline{U}_{a,p} = \sum_{t=1}^{p-1}\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{t}{p}\right)e^{2\pi i\frac{ax(t-1)}{p}}.$$

Para $t=1$ la sumación respecto de x da $p-1$; para $t>1$ resulta $-\left(\frac{t}{p}\right)$. Por lo tanto

$$|U_{a,p}|^2 = p-1-\sum_{t=2}^{p-1}\left(\frac{t}{p}\right) = p, \quad |U_{a,p}| = \sqrt{p}.$$

o sea

$$|U_{a,p}|^2 = U_{a,p}\overline{U}_{a,p} = \sum_{t=0}^{p-1}\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x+t}{p}\right)\left(\frac{x}{p}\right)e^{2\pi i\frac{at}{p}}.$$

Para $t=0$ la sumación respecto de x da $p-1$; para $t>0$ resulta $-e^{2\pi i\frac{at}{p}}$. Por lo tanto

$$|U_{a,p}|^2 = p-1-\sum_{t=1}^{p-1}e^{2\pi i\frac{at}{p}} = p, \qquad |U_{a,p}| = \sqrt{p}.$$

β) Si $(a, p)=p$ el teorema es evidente. Si $(a, p)=1$ éste se deduce de

$$U_{a,p} = \left(\frac{a}{p}\right)\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{ax}{p}\right)e^{2\pi i\frac{ax}{p}} = \left(\frac{a}{p}\right)U_{1,p}.$$

b, α) Supongamos que r recorre los restos cuadráticos, y n los no-restos cuadráticos, comprendidos en el sistema completo de restos. Se tiene

$$S_{a,p} = 1+2\sum_r e^{2\pi i\frac{ar}{p}}.$$

Restando de aquí término a término

$$0 = 1+\sum_r e^{2\pi i\frac{ar}{p}}+\sum_n e^{2\pi i\frac{an}{p}}$$

se obtiene la igualdad indicada.

β) Se tiene

$$|S_{a,m}|^2 = \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{a(t^2+2tx)}{m}}.$$

Para un t dado la sumación respecto de x da $me^{2\pi i \frac{at^2}{m}}$ ó 0, según que sea divisible $2t$ por m o no. Si m es impar, se tiene

$$|S_{a,m}|^2 = me^{2\pi i \frac{a\cdot 0^2}{m}} = m.$$

Si m es par, $m = 2m_1$, se tiene

$$|S_{a,m}|^2 = m\left(e^{2\pi i \frac{a\cdot 0^2}{m}} + e^{2\pi i \frac{a\cdot m_1^2}{m}}\right).$$

Aquí el segundo miembro es igual a cero si m_1 es impar y es igual a $2m$ si m_1 es par.

γ) Para cualquier entero b, se tiene

$$|S_{A,m}| = \left|\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{Ax^2+2Abx}{m}}\right|,$$

de donde, eligiendo b de la condición $2Ab \equiv a \pmod{m}$, se obtiene (pregunta β) el resultado indicado.

12, a, α) Se tiene

$$m\sum_z{}' \Phi(z) = \sum_z \sum_{s=M}^{M+Q-1} \sum_{a=0}^{m-1} \Phi(z)\, e^{2\pi i \frac{a(z-s)}{m}}.$$

La parte de la suma del segundo miembro que corresponde a $a = 0$, es igual a $Q\sum_z \Phi(z)$; la parte que corresponde a los valores restantes de a es en valor absoluto (pregunta 11, c, cap. III)

$$< \Delta \sum_{a=1}^{m-1} \left| \sum_{s=M}^{M+Q-1} e^{2\pi i \frac{-s}{m}} \right| < \Delta m(\ln m - \delta).$$

β) Es suficiente demostrar que la suma

$$T = \sum_z \sum_{y=0}^{l} \sum_{y_1=0}^{l} \sum_{a=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{a(z-N-y+y_1)}{m}},$$

la cual es igual al producto de m por el número de soluciones de la congruencia $z \equiv N - y + y_1 \pmod{m}$, es positiva. Pero la parte de esta suma que corresponde a $a = 0$, es igual a

$$Zh^2; \quad h = l + 1.$$

La parte que corresponde a un valor $a > 0$ dado, es en valor absoluto menor que

$$\Delta_0 \min\left(h^2, \frac{1}{4\left(\frac{a}{m}\right)^2}\right).$$

Por consiguiente, la parte que corresponde a todos los valores positivos a, es en valor absoluto menor que

$$2\Delta_0 \sum_{a=1}^{\infty} \min\left(h^2, \frac{m^2}{4a^2}\right) < 2\Delta_0 \left(\int_0^{\frac{m}{2h}} h^2\, d\alpha + \int_{\frac{m}{2h}}^{\infty} \frac{m^2}{4a^2}\, d\alpha\right) = 2\Delta_0 mh.$$

Por lo tanto,

$$T > Zh^2 - 2\Delta_0 mh > 0.$$

b, α) Se deduce del teorema de la pregunta **11**, **a**, α) y del teorema de la pregunta **a**.

β) La desigualdad de la pregunta α) da $R - N = \theta \sqrt{p} \ln p$. Además, es obvio que $R + N = Q$.

γ) Del teorema de la pregunta **11**, **b**, β) se deduce que se cumplen las condiciones del teorema de la pregunta **a**, α) si se hace $m = p$, $\Phi(z) = 1$ $\Delta = \sqrt{p}$, y z recorre los valores $z = x^2$; $x = 0, 1, \ldots, p-1$. Pero entre los valores de z hay uno que es congruente respecto del módulo p con 0 y sendos pares que son congruentes respecto del módulo p con cada resto cuadrático del sistema completo. Por lo tanto,

$$\sum_z{}' \Phi(z) = 2R, \quad \sum_z \Phi(z) = p$$

y se obtiene

$$2R = \frac{Q}{p} p + \theta \sqrt{p} \ln p.$$

δ) Se deduce del teorema de la pregunta **11**, **b**, γ) y del teorema de la pregunta **a**, α).

ε) Del teorema de la pregunta δ) se deduce que se cumplen las condiciones del teorema de la pregunta **a**, α) si se hace $m = p$, $\Phi(z) = 1$, $\Delta = \sqrt{p} \ln p$, y z recorre los valores $z = Ax^2$; $x = M_0, M_0 + 1, \ldots, M_0 + Q_0 - 1$. Por lo tanto,

$$\sum_z{}' \Phi(z) = T, \quad \sum_z \Phi(z) = Q_0,$$

de donde se deduce la fórmula indicada en la pregunta.

c. La parte de la suma que contiene los términos con $\left(\frac{\alpha}{p}\right)=1$, es igual a $p(R^2+N^2)$, la parte restante es igual a $-2pRN$. Por lo tanto, toda la suma es igual a $p(R-N)^2$.
La parte de la suma que contiene los términos con $\alpha=0$, es igual a 0. La parte restante es en valor absoluto menor (pregunta 11, c, cap. III),

$$\sum_{a=1}^{p-1} \mid \sum_{x=M}^{M+Q-1} e^{2\pi i \frac{ax}{p}} \mid \sum_{\alpha=1}^{p-1} \mid \sum_{y=M}^{M+Q-1} e^{2\pi i \frac{\alpha a y}{p}} \mid < p^2 (\ln p)^2.$$

Por consiguiente,

$$p(R-N)^2 < p^2(\ln p)^2, \qquad |R-N| < \sqrt{p}\ln p.$$

Respuestas a las preguntas del capítulo VI

1, a. Si q es un número primo impar y $a^p \equiv 1 \pmod{q}$, entonces a respecto del módulo q pertenece a uno de los exponentes $\delta = 1$; p. Si $\delta = 1$, se tiene $a \equiv 1 \pmod{q}$, si $\delta = p$, se tiene $q - 1 = 2px$; x es entero.
b. Si q es un número primo impar y $a^p + 1 \equiv 0 \pmod{q}$, entonces $a^{2p} \equiv 1 \pmod{q}$. Por lo tanto, respecto del módulo q el número a pertenece a uno de los exponentes $\delta = 1, 2, p, 2p$. Los casos $\delta = 1$; p son imposibles. Si $\delta = 2$, se tiene $a^2 \equiv 1 \pmod{q}$, $a + 1 \equiv 0 \pmod{q}$. Si $\delta = 2p$, se tiene $q - 1 = 2px$; x es entero.
c. Son primos de la forma $2px + 1$, por ejemplo, los divisores primos del número $2^p - 1$. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_k$ cualesquiera k números primos de la forma $2px + 1$; el número $(p_1, p_2, \ldots p_k)^p - 1$ posee un divisor primo de la forma $2px + 1$, distinto de $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
d. Si q es primo y $2^{2^n} + 1 \equiv 0 \pmod{q}$, entonces $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{q}$. Por lo tanto, respecto del módulo q el número 2 pertenece al exponente 2^{n+1} y, por consiguiente, $q - 1 = 2^{n+1}x$; x es entero.
2. Evidentemente, respecto del módulo $a^n - 1$ el número a pertenece al exponente n. Por lo tanto, n es un divisor de $\varphi(a^n - 1)$.
3, a. Supongamos que después de realizar la k-ésima operación se obtiene la sucesión inicial. Evidentemente, la k-ésima operación es equivalente a la siguiente: en la sucesión

$$1, 2, \ldots, n-1, n, n, n-1, \ldots, 2, 1, 1, \ldots$$
$$\ldots, n-1, n, n, n-1, \ldots, 2, 1, 2, \ldots$$

se toman los números que ocupan los lugares 1, $1 + 2^k$, $1+2\cdot 2^k \ldots$ Por lo tanto, en la sucesión inicial, en el $1 + 2^k$ lugar tiene que estar

el número 2. Por consiguiente, la condición indicada en la pregunta es necesaria. Pero ésta también es suficiente, puesto que al cumplirse se tienen las siguientes congruencias respecto del módulo $2n - 1$:

$$1 \equiv 1, \quad 1 + 2^k \equiv 0, \quad 1 + 2 \cdot 2^k \equiv -1, \ldots$$

o bien

$$1 \equiv 1, \quad 1 + 2^k \equiv 2, \quad 1 + 2 \cdot 2^k \equiv 3, \ldots$$

b. La solución es análoga a la solución de la pregunta **a.**

4. La solución de la congruencia $x^{\delta} \equiv 1$ (mód. p) pertenece a un exponente de la forma $\frac{\delta}{\delta'}$, donde δ' es un divisor de δ. Aquí δ' es un múltiplo de d cuando, y sólo cuando, $x^{\frac{\delta}{d}} \equiv 1$ (mód. p). Escribiendo todos los δ valores de δ' y tomando $f=1$, obtenemos $S' = \sum_{d \setminus \delta} \mu(d) S_d$, donde S' es el número buscado y $S_d = \frac{\delta}{d}$.

5, a. Aquí (§ 3; ejemplo c, § 5) tiene que ser $\left(\frac{g}{2^n+1}\right) = -1$. Esta condición se cumple para $g=3$.

b. Aquí no tiene que ser $\left(\frac{g}{2p+1}\right) = 1$, $g^2 \equiv 1$ (mód. $2p+1$). Esta condición se cumple para los valores indicados de g.

c. Aquí no tiene que ser $\left(\frac{g}{4p+1}\right) = 1$, $g^4 \equiv 1$ (mód. $4p+1$). Esta condición se cumple para $g=2$.

d. Aquí no tiene que ser $\left(\frac{g}{2^n p+1}\right) = 1$, $g^{2^n} \equiv 1$ (mód. $2^n p+1$). Esta condición se cumple para $g=3$.

6, a, α) Si n es múltiplo de $p - 1$, el teorema es evidente. Supongamos que n no es divisible por $p - 1$. Los números $1, 2, \ldots, p - 1$, sin tener en cuenta el orden que siguen, son congruentes respecto del módulo p con los números $g, 2g, \ldots, (p - 1)g$, donde g es una raíz primitiva respecto del módulo p. Por lo tanto,

$$S_n \equiv g^n S_n \text{ (mód. } p), \qquad S_n \equiv 0 \text{ (mód. } p).$$

β) Se tiene

$$\sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x(x^2+1)}{p}\right) \equiv \sum_{x=1}^{p-1} x^{\frac{p-1}{2}} (x^2+1)^{\frac{p-1}{2}} \text{ (mód. } p),$$

de donde (pregunta α)) se obtiene el resultado indicado.

b. Si $p > 2$, se tiene

$$1 \cdot 2 \ldots (p-1) \equiv g^{1+2+\ldots+p-1} \equiv g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (mód. } p).$$

7, a. Se tiene $g_1^{\text{ind}_{g_1} a} \equiv a$ (mód. p), $\text{ind}_{g_1} a \, \text{ind}_g g_1 \equiv \text{ind}_g a$ (mód. $p-1$), $\text{ind}_{g_1} a \equiv \alpha \, \text{ind}_g a$ (mód. $p-1$).

b. De $\text{ind}_g a \equiv s$ (mód. n). $\text{ind}_{g_1} a \equiv \alpha \, \text{ind}_g a$ (mód. $p-1$) se deduce que $\text{ind}_{g_1} a \equiv \alpha s \equiv s_1$ (mód. n).

8. Sea $(n, p-1)=1$. Hallando u de la condición $nu \equiv 1$ (mód. $p-1$), obtenemos la solución $x \equiv a^u$ (mód. p).

Supongamos que n es primo, $p-1=n^{\alpha}t$, α es un entero positivo, $(t, n)=1$. Si la congruencia es posible, se tiene $a^{n^{\alpha-1}t} \equiv 1$ (mód. p); si $\alpha > 1$, entonces, observando que $z \equiv g^{n^{\alpha-1}tr}$ (mód. p), $r=0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, son todas las soluciones de la congruencia $z^n \equiv 1$ (mód. p), para cierto $r_1=0, 1, \ldots, n-1$, se tiene

$$a^{n^{\alpha-2}t} g^{n^{\alpha-1}tr_1} \equiv 1 \text{ (mód. } p);$$

si $\alpha > 2$, para cierto $r_2=0, 1, \ldots, n-1$, se tiene

$$a^{n^{\alpha-3}t} g^{n^{\alpha-2}tr_1+n^{\alpha-1}tr_2} \equiv 1 \text{ (mód. } p),$$

etc.; finalmente, para cierto $r_{\alpha-1}=0, 1, \ldots, n-1$, se tiene

$$a^t g^{ntr_1+n^2tr_2+\ldots+n^{\alpha-1}tr_{\alpha-1}} \equiv 1 \text{ (mód. } p).$$

Hallando u y v de la condición $tu-nv=-1$, se obtienen n soluciones:

$$x \equiv a^v g^{ut(r_1+nr_2+\ldots+n^{\alpha-2}r_{\alpha-1})+n^{\alpha-1}tr} \text{ (mód. } p);$$
$$r=0, 1, \ldots n-1.$$

Supongamos que el número primo n_1 es un divisor de $(n, p-1)$, $n=n_1n_2$, $n_2 > 1$. Para cada solución de la congruencia $y^{n_1} \equiv$ $\equiv a$ (mód. p) buscamos una solución correspondiente de la congruencia $x^{n_2} \equiv y$ (mód. p).

9, a. Del modo indicado se obtienen $cc_0c_1 \ldots c_k = \varphi(m)$ caracteres. Supongamos que para dos caracteres $\chi_1(a)$ y $\chi_2(a)$ son distintos entre sí los valores R' y R'' de alguna de las raíces $R, R_0, R_1, \ldots$ $\ldots, R_k$; para el número a_1, cuyos índices son todos iguales a 0, a excepción de uno, correspondiente a los valores indicados R' y R'', e igual a 1, se tiene

$$\chi_1(a_1)=R', \quad \chi_2(a_1)=R''.$$

b, α) Se tiene $\chi(1)=R^0 \ldots R_k^0=1$.

β) Sean $\gamma', \ldots, \gamma'_k$; $\gamma'', \ldots, \gamma''_k$ los sistemas de índices de los números a_1 y a_2; entonces $\gamma'+\gamma'', \ldots, \gamma'_k+\gamma''_k$ es el sistema de índices del número a_1a_2 (c, § 7).
γ) Si $a_1 \equiv a_2$ (mód. m), los índices de los números a_1 y a_2 son congruentes entre sí respecto de los módulos $c, \ldots, c_k$.
c. La propiedad indicada se deduce de

$$\sum_{a=0}^{m-1} \chi(a) = \sum_{\gamma=0}^{c-1} R^{\gamma} \ldots \sum_{\gamma_k=0}^{c_k-1} R_k^{\gamma_k}.$$

d. La propiedad indicada se deduce de

$$\sum_{\chi} \chi(a) = \sum_{R} R^{\gamma} \ldots \sum_{R_k} R_k^{\gamma_k}.$$

e. Supongamos que $\psi(a_1)$ no es igual a 0; de la igualdad $\psi(a_1) = \psi(a_1)\psi(1)$ se deduce que: $\psi(1) = 1$. Por otra parte $\psi(a)$ es diferente de 0 si $(a, m) = 1$; en efecto, determinando a' de la condición $aa' \equiv 1$ (mód. m), obtenemos $\psi(a)\psi(a') = 1$.
Si $(a_1, m) = 1$, se tiene

$$\sum_a{}' \frac{\chi(a)}{\psi(a)} = \sum_a{}' \frac{\chi(a_1a)}{\psi(a_1a)} = \frac{\chi(a_1)}{\psi(a_1)} \sum_a{}' \frac{\chi(a)}{\psi(a)};$$

por lo cual, o $\sum_a{}' \frac{\chi(a)}{\psi(a)} = 0$ o bien $\psi(a_1) = \chi(a_1)$ para todos los valores de a_1. Pero la primera proposición no puede verificarse para todos los χ, pues en caso contrario sería $H = 0$, mientras que $H = \varphi(m)$ ya que, sumando para un valor dado a respecto de todos los caracteres, se tiene

$$\sum_{\chi} \frac{\chi(a)}{\psi(a)} = \begin{cases} \varphi(m), & \text{si } a \equiv 1 \text{ (mód. } m), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

f. α) Si $R', \ldots, R_k$ y $R'', \ldots, R''_k$ son los valores de $R, \ldots, R_k$, correspondientes a los caracteres $\chi_1(a)$ y $\chi_2(a)$: entonces $\chi_1(a)\,\chi_2(a)$ es el carácter cuyos valores correspondientes son $R'R'', \ldots, R'_kR''_k$.
β) Cuando $R, \ldots, R_k$ recorren todas las raíces de las correspondientes ecuaciones, $R'R, \ldots, R'_kR_k$ recorren en cierto orden las mismas raíces.
γ) Determinando l' de la condición $ll' \equiv 1$ (mód. m), se tiene

$$\sum_{\chi} \frac{\chi(a)}{\chi(l)} = \sum_{\chi} \frac{\chi(al')}{\chi(ll')} = \sum_{\chi} \chi(al').$$

lo cual es igual a $\varphi(m)$ o a 0, según que sea $a \equiv l \pmod{m}$ o no.

10, a, α) Determinando x' mediante la congruencia $xx' \equiv 1 \pmod{p}$, se tiene

$$\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{l \operatorname{ind}(x+k) - l \operatorname{ind} x}{n}} = \sum_{x=1}^{-1} e^{2\pi i \frac{l \operatorname{ind}(1+kx')}{n}} = -1.$$

β) Se tiene

$$S = \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{z_1=0}^{Q-1} \sum_{z=0}^{Q-1} e^{2\pi i \frac{l \operatorname{ind}(x+z_1) - l \operatorname{ind}(x+z)}{n}}.$$

Si $z_1 = z$ la sumación respecto de x da $p-1$, si z_1 no es igual a z la sumación respecto de x (pregunta α)) da -1. Por lo tanto,

$$S = Q(p-1) - Q(Q-1) = (p-Q)Q.$$

11, a, α) Se tiene

$$|U_{a,p}|^2 = \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{k \operatorname{ind} t}{n}} e^{2\pi i \frac{a(t-1)x}{p}} =$$

$$= p - 1 - \sum_{t=2}^{p-1} e^{2\pi i \frac{k \operatorname{ind} t}{n}} = p.$$

β) Si $(a, p) = p$, el teorema es evidente. Si $(a, p) = 1$, el teorema se deduce de

$$U_{a,p} = e^{2\pi i \frac{-k \operatorname{ind} a}{n}} \sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{k \operatorname{ind} ax}{n}} e^{2\pi i \frac{ax}{p}} = e^{2\pi i \frac{-k \operatorname{ind} a}{n}} U_{1,p}.$$

γ) Evidentemente, A y B son enteros y $|S|^2 = A^2 + B^2$. Para ciertos ε, ε', ε'' que cumplen la condición $|\varepsilon| = |\varepsilon'| = \varepsilon''| = 1$, se tiene (pregunta β))

$$S = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{p}\,\varepsilon\sqrt{p}} \sum_{z_1=1}^{p-1} \sum_{z=1}^{p-1} \sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{\operatorname{ind} z_1 + \operatorname{ind} z}{4}} e^{2\pi i \frac{z_1 x + z(x+1)}{p}}.$$

Si $z_1 + z$ no es igual a p, la sumación respecto de x da cero. Por lo tanto

$$S = \varepsilon' \sum_{z=1}^{p-1} \left(\frac{z}{p}\right) e^{2\pi i \frac{z}{p}} = \varepsilon'' \sqrt{p}, \quad |S|^2 = p.$$

δ) Se tiene

$$S = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{p-1} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{k(\operatorname{ind} x - s)}{n}} e^{2\pi i \frac{x}{p}}$$

La parte de esta expresión que corresponde a $k=0$, es igual a $-\frac{1}{n}$. La parte que corresponde a todos los valores positivos de k es en valor absoluto menor que (pregunta α))

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\sqrt{p}.$$

b. α) Para un valor de z dado, la congruencia $x^n \equiv z \pmod{p}$ es posible solamente cuando ind z es divisible por δ, teniendo en este caso δ soluciones. Por lo tanto

$$S_{a,\,p}=1+\delta\sum_{z_0} e^{2\pi i\frac{az_0}{p}}=\delta\left(\frac{1}{\delta}+\sum_{z_0} e^{2\pi i\frac{az_0}{p}}\right),$$

donde z_0 recorre los números del sistema reducido de restos respecto del módulo p que cumplen la condición ind $z \equiv 0 \pmod{\delta}$. Por lo tanto (pregunta a, δ))

$$S_{a,\,p}<\delta\left(1-\frac{1}{\delta}\right)\sqrt{p}=(\delta-1)\sqrt{p}.$$

β) Haciendo

$$x=u+p^{s-1}v;\ u=0,\ \ldots,\ p^{s-1}-1,\ v=0,\ \ldots,\ p-1,$$

se tiene

$$e^{2\pi i\frac{ax^n}{p^s}}=e^{2\pi i a(u^n p^{-s}+nu^{n-1}p^{-1}v)}.$$

Si $(u,\,p)=1$ la sumación respecto de v da cero. Por lo tanto

$$S_{a,\,p^s}=\sum_{x_0=0}^{p^{s-1}-1} e^{2\pi i a p^{n-s}x_0^n}=p^{s-1},\quad S'_{a,\,p^s}=0.$$

γ) Sea p^τ la máxima potencia de p que divide a n. Se tiene $s\geqslant\tau+3$. Haciendo

$$x=u+p^{s-1-\tau}v,\quad u=0,\ \ldots,\ p^{s-1-\tau}-1,\quad v=0,\ \ldots,\ p^{\tau+1}-1,$$

obtenemos

$$e^{2\pi i\frac{ax^n}{p^s}}=e^{2\pi i a(u^n p^{-s}+nu^{n-1}p^{-\tau-1}v)}.$$

Si $(u,\,p)=1$ la sumación respecto de v da cero. Por lo tanto

$$S_{a,\,p^s}=\sum_{x_0=0}^{p^{s-1}} e^{2\pi i\frac{ax_0^n}{p^{s-n}}}=p^{n-1}S_{a,\,p^{s-n}},\quad S'_{a,\,p^s}=0$$

δ) Sea $m=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ la descomposición canónica del número m
Haciendo

$$T_{a,m}=m^{-1+\nu}S_{a,m};\quad \nu=\frac{1}{n},\quad m=M_1p_1^{\alpha_1}=\dots=M_kp_k^{\alpha_k}$$

y determinando $a_1, \dots, a_k$ de la condición

$$a\equiv M_1a_1+\dots+M_ka_k \pmod{m},$$

se tiene (pregunta **12**, **d**, cap. **III**)

$$T_{a,m}=T_{a_1,p_1^{\alpha_1}}\dots T_{a_k,p^{\alpha_k}}.$$

Pero, si $s=1$, se tiene

$$|T_{a,p^s}|<p^{-1+\nu}n\sqrt{p}\leqslant np^{-\frac{1}{6}}.$$

Si $1<s\leqslant n$, $(n, p)=1$, se tiene

$$|T_{a,p^s}|=p^{-s+s\nu}p^{s-1}\leqslant 1.$$

Si $1<s\leqslant n$, $(n, p)=p$, se tiene

$$|T_{a,p^s}|\leqslant p^{-s+s\nu}p^s\leqslant p\leqslant n.$$

El caso $s>n$, en virtud de que $T_{a,p^s}=p^{-s+s\nu}p^{n-1}S_{a,p^{s-n}}=T_{a,p^{s-n}}$ se reduce al caso $s\leqslant n$. Por lo tanto

$$|T_{a,m}|\leqslant C=n^{n^6+n},$$

de donde se deduce la desigualdad indicada en la pregunta.

12, **a**. Se deduce del teorema de la pregunta **11**, **a**, α) y del teorema de la pregunta **12**, **a**, α) cap. **V**.

b, α) Se tiene

$$Tn=\sum_{x=M}^{M+Q-1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{2\pi i\frac{k(\operatorname{ind}x-s)}{n}}.$$

Para $k=0$, sumando respecto de x, resulta Q; para $k>0$ resulta un número cuyo módulo es menor que $\sqrt{p}\ln p$. De aquí se deduce la fórmula indicada en la pregunta.

β) Se deduce del teorema de la pregunta **12**, **a**, β) cap. **V** y del teorema de la pregunta **11**, **a**, δ).

c. Tomando $f(x)=1$, si x recorre los valores $x=\operatorname{ind} M$, $\operatorname{ind}(M+1)$, ...
..., $\operatorname{ind}(M+Q-1)$, resulta (pregunta **17**, **a**, cap. **II**) $S'=\sum_{d\setminus p-1}\mu(d)S_d$.
Aquí S' es el número de valores de x que cumplen la condición $(x,p-1)=1$;

por lo tanto, $S'=H$. Por otra parte, S_d es el número de valores de x que son múltiplos de d, es decir, es el número de restos de grado d que hay en la sucesión M, $M+1$, ..., $M+Q-1$. Por consiguiente,

$$H=\sum_{d\backslash p-1}\mu(d)\left(\frac{Q}{d}+\theta_d\sqrt{p}\ln p\right); \quad |\theta_d|<1, \quad \theta_1=0.$$

d. Del teorema de la pregunta **a** se deduce que se cumplen las condiciones de la pregunta **12, a, α)** cap. **V**, si se hace $m=p-1$, $\Phi(z)=1$, $\Delta=\sqrt{p}\ln p$, y z recorre los valores $z=\operatorname{ind}x$; $x=M$, $M+1$, ..., $M+Q-1$. Entonces se obtiene (Q_1 en lugar de Q)

$$\sum_z{}' \Phi(z)=J, \qquad \sum_z \Phi(z)=Q, \quad J=\frac{Q_1}{p-1}Q+\theta\sqrt{p}(\ln p)^2.$$

13. Supongamos que no hay no-restos no superiores a h. La cantidad de no-restos de grado n que hay entre los números

$$1, \ldots, Q; \qquad Q=[\sqrt{p}(\ln p)^2]$$

se puede acotar de dos modos:
Partiendo de la fórmula de la pregunta **12, b** y teniendo en cuenta que pueden ser no-restos solamente los números que son divisibles por números primos mayores que h. Resulta

$$1-\frac{1}{n}<\ln\frac{\frac{1}{2}\ln p+2\ln\ln p}{\frac{1}{c}\ln p+2\ln\ln p}+O\,\frac{1}{\ln p}.$$

$$0<\ln\frac{1+4\dfrac{\ln\ln p}{\ln p}}{1+2c\dfrac{\ln\ln p}{\ln p}}+O\left(\frac{1}{\ln p}\right).$$

La imposibilidad de la última desigualdad para todos los números p suficientemente grandes demuestra el teorema.
14, a. Se tiene

$$|S|^2\leqslant X\sum_{x=0}^{m-1}\sum_{y_1=0}^{m-1}\sum_{y=0}^{m-1}\rho(y_1)\overline{\rho(y)}\,e^{2\pi i\frac{ax(y_1-y)}{m}}.$$

Para valores dados de y_1 e y, la sumación respecto de x da $Xm|\rho(y)|^2$ o cero, según que sea $y_1=y$ o no. Por lo tanto

$$|S|^2\leqslant XYm, \quad |S|\leqslant\sqrt{XYm}.$$

b, α) Se tiene

$$S=\frac{1}{\varphi(m)}\sum_u \sum_v \chi(u)\chi(v)e^{2\pi i\frac{au^n v^n}{m}},$$

donde u y v recorren los sistemas reducidos de restos respecto del módulo m. De aquí que

$$S=\frac{1}{\varphi(m)}\sum_{x=0}^{m-1}\sum_{y=0}^{m-1} \nu(x)\rho(y)e^{2\pi i\frac{axy}{m}};$$

$$\nu(x)=\sum_{u^n\equiv x \,(\text{mód. } m)} \chi(u), \quad \rho(y)=\sum_{v^n\equiv y \,(\text{mód. } m)} \chi(v).$$

Pero, se tiene (pregunta 11, cap. IV)

$$\sum_{x=0}^{m-1} |\nu(x)|^2 \leqslant K\varphi(m), \quad \sum_{y=0}^{m-1} |\rho(y)|^2 \leqslant K\varphi(m).$$

Por lo tanto (pregunta a)

$$|S|\leqslant\frac{1}{\varphi(m)}\sqrt{K\varphi(m)K\varphi(m)m}=K\sqrt{m}.$$

β) Sea $m=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ la descomposición canónica del número m. La congruencia $x^n\equiv 1$ (mód. m) es equivalente al sistema

$$x^n\equiv 1 \ (\text{mód. } 2^{\alpha}), \quad x^n\equiv 1 \ (\text{mód. } p_1^{\alpha_1}), \ \ldots, \ x^n\equiv 1 \ (\text{mód. } p_k^{\alpha_k}).$$

Sean $\gamma(x)$ y $\gamma_0(x)$ los índices del número x respecto del módulo 2^{α} (g, § 6). La congruencia $x^n\equiv 1$ (mód. 2^{α}) es equivalente al sistema $n\gamma(x)\equiv 0$ (mód. c), $n\gamma_0(x)\equiv 0$ (mód. c_0). La primera congruencia de este sistema posee no más de 2 soluciones; la segunda posee no más de n soluciones. Por lo tanto, la congruencia $x^n\equiv 1$ (mód. 2^{α}) posee no más de $2n$ soluciones. Según b, § 5, cada una de las congruencias $x^n\equiv 1$ (mód. $p_1^{\alpha_1}$), ..., $x^n\equiv 1$ (mód. $p_k^{\alpha_k}$) posee no más de n soluciones. Por consiguiente,

$$K\leqslant 2(\tau(m))^{\frac{\ln n}{\ln 2}}; \quad K=O(m^{\varepsilon}).$$

c, α) Fácilmente se observa que s recorre

$$U=(p-1)\left(1+\frac{1}{q_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{q_k}\right)^{2^{-k}}$$

valores, y s' recorre

$$V=(p-1)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{q_k}\right)2^{-k}$$

valores. Además, cuando t, para unos valores dados de s y s', recorre el sistema reducido de restos respecto del módulo $p-1$, el producto $(s+s')t$ también recorre el sistema reducido de restos respecto del módulo $p-1$. Por lo tanto, $W=UVS$. Pero, en virtud del teorema de la pregunta a, se tiene $|S_t|<\sqrt{UVp}$ y, por consiguiente, $W=$ $=\varphi(p-1)\sqrt{UVp}$. Comparando las dos expresiones halladas para W, se obtiene

$$S<\varphi(p-1)\sqrt{\frac{p}{UV}}=\frac{\varphi(p-1)}{p-1}\frac{2^k\sqrt{p}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{q_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{q_k^2}\right)}}<$$
$$<\frac{9}{8}\frac{\varphi(p-1)}{p-1}2^k\sqrt{p}.$$

β) Se deduce del teorema de la pregunta 12, a, α) cap. V y del teorema de la pregunta α).

γ) Se deduce del teorema de la pregunta 12, a, β) cap. V y del teorema de la pregunta α).

15, a. Se tiene

$$|S|^2=\sum_{t=1}^{p-1}\sum_{x=1}^{p-1}e^{2\pi i\frac{a(t^n-1)x^n+b(t-1)x}{p}}.$$

En el caso $t^n\equiv 1 \pmod{p}$, la sumación respecto de x da $p-1$ si $t=1$ y -1 si $t>1$. En el caso contrario, tomando $z(t-1)^{-1}$ en lugar de x la parte de la suma doble que corresponde al valor t elegido la expresamos en la forma

$$\sum_{z=1}^{p-1}e^{2\pi i\frac{a(t^n-1)(t-1)^{-n}z^n+bz}{p}}.$$

Por lo tanto

$$|S|^2\leqslant p-1+\left|\sum_{u=1}^{p-1}\sum_{v=1}^{p-1}\nu(u)\rho(v)e^{2\pi i\frac{auv}{p}}\right|,$$

donde $\nu(u)$ no es superior al número de soluciones de la congruencia $(t^n-1)(t-1)^{-n}\equiv u \pmod{p}$ con la condición $t>1$, y $|\rho(v)|$ no es superior al número de soluciones de la congruencia $z^n\equiv v \pmod{p}$.

Por lo tanto, $\nu(u) \leqslant 2n_1$, $|\rho(v)| \leqslant n_1$,

$$\sum_{u=1}^{p-1} (\nu(u))^2 \leqslant (p-1)\, 2n_1, \qquad \sum_{v=1}^{p-1} |\rho(v)|^2 \leqslant (p-1)\, n_1.$$

Aplicando el teorema de la pregunta 14, a, obtenemos

$$|S|^2 \leqslant p-1+\sqrt{(p-1)\, 2n_1 (p-1)\, n_1 p} < 2n_1 p^{\frac{3}{2}}.$$

b, α) Se deduce del teorema de la pregunta a y del teorema de la pregunta 12, a, α) cap. V.

β) Del teorema de la pregunta α) se deduce que se cumplen las condiciones del teorema de la pregunta 12, a, α) cap. V si se hace $m=p$, $\Phi(z)=1$, $\Delta=\frac{3}{2} n_1^{\frac{1}{2}} p^{\frac{3}{4}} \ln p$, y z recorre los valores $z=Ax^n$; $x=M_0$, $M_0+1, \ldots, M_0+Q_0-1$. Por lo tanto

$$\sum_z{}' \Phi(z)=T, \qquad \sum_z \Phi(z)=Q_0,$$

de donde se deduce la fórmula indicada en la pregunta.

c, α) Supongamos que $\gamma \equiv 4a\gamma_1$ (mód. p). Se tiene (pregunta 11, a, cap. V)

$$\left(\frac{a}{p}\right) S=\sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{4a^2x^2+4abx+4ac}{p}\right) e^{2\pi i \frac{4a\gamma_1 x}{p}}=$$

$$=\frac{1}{U_{1,p}} \sum_{z=1}^{p-1} \left(\frac{z}{p}\right) \sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{z(4a^2x^2+4abx+4ac+4a\gamma_1 x z^{-1})}{p}}=$$

$$=\sum_{z=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{-(b^2-4ac)z-2b\gamma_1-\gamma_1^2 z^{-1}}{p}}$$

La última suma es en valor absoluto (pregunta a) $<\frac{3}{2} p^{\frac{3}{4}}$.

β) Se deduce del teorema de la pregunta α) y del teorema de la pregunta 12, a, α) cap. V.

Respuestas a los ejercicios numéricos

Respuestas a los ejercicios del capítulo I

1, a. 17. **b.** 23

2, a. α) $\delta_4 = \frac{15}{11}$; β) $\alpha = \frac{19}{14} + \frac{\theta}{14 \cdot 20}$.

b. α) $\delta_6 = \frac{80}{59}$; β) $\alpha = \frac{1002}{739} + \frac{\theta}{739 \cdot 1000}$.

3. En total se obtienen 22 fracciones.

5, a. $2^8 \cdot 3^5 \cdot 11^3$. **b.** $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 37$.

Respuestas a los ejercicios del capítulo II

1, a. 1312.

b. $2^{119} \cdot 3^{59} \cdot 5^{31} \cdot 7^{19} \cdot 11^{12} \cdot 13^9 \cdot 17^7 \cdot 19^6 \cdot 23^5 \cdot 29^4 \cdot 31^4 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot 43^2 \times$
$\times\ 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 61^2 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113$.

2, a. τ (5600) = 36; S (5600) = 15 624.

b. τ (116 424) = 96; S (116 424) = 410 400.

3. La suma de todos los valores es igual a 1.

4. α) 1152; β) 466 400.

5. La suma de todos los valores es igual a 774.

Respuestas a los ejercicios del capítulo III

1, a. 70. **b.** Es divisible.

2, a. $3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2 \cdot 2\,999$. **b.** $7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 257$.

Respuestas a los ejercicios del capítulo IV

1, a. $x \equiv 81$ (mód. 337). **b.** $x \equiv 200; 751; 1302; 1853; 2404$ (mód. 2755).
2, b. $x \equiv 1630$ (mód. 2413).
3. $x = 94 + 111\,t$; $y = 39 + 47\,t$, donde t es un entero arbitrario.
4, a. $x \equiv 170b_1 + 52b_2$ (mód. 221);
$x \equiv 131$ (mód. 221); $x \equiv 110$ (mód. 221); $x \equiv 89$ (mód. 221).
b. $x \equiv 11\,151b_1 + 11\,800b_2 + 16\,875b_3$ (mód. 39 825).
5, a. $x \equiv 91$ (mód. 120). **b.** $x \equiv 8479$ (mód. 15 015).
6. $x \equiv 100$ (mód. 143); $y \equiv 111$ (mód. 143).
7, a. $3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x \equiv 0$ (mód. 5).
b. $x^5 + 5x^4 + 3x^2 + 3x + 2 \equiv 0$ (mód. 7).
8. $x^6 + 4x^5 + 22x^4 + 76x^3 + 70x^2 + 52x + 39 \equiv 0$ (mód. 101).
9, a. $x \equiv 16$ (mód. 27). **b.** $x \equiv 22; 53$ (mód. 64).
10, a. $x \equiv 113$ (mód. 125).
b. $x \equiv 43, 123, 168, 248, 293, 373, 418, 498, 543, 623$, (mód. 625).
11, a. $x \equiv 2, 5, 11, 17, 20, 26$ (mód. 30).
b. $x \equiv 76, 22, 176, 122$ (mód. 225).

Respuestas a los ejercicios del capítulo V

1, a. 1, 2, 3, 4; 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18.
b. 2, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 29, 31, 32, 35.
2, a. α) 0; β) 2. **b.** α) 0; β) 2.
3, a. α) 0; β) 2. **b.** α) 0; β) 2.
4, a. α) $x \equiv \pm 9$ (mód. 19); β) $x \equiv \pm 11$ (mód. 29);
γ) $x \equiv \pm 14$ (mód. 97).
b. α) $x \equiv \pm 66$ (mód. 311); β) $x \equiv \pm 130$ (mód. 277);
γ) $x \equiv \pm 94$ (mód. 353).
5, a. $x \equiv \pm 72$ (mód. 125). **b.** $x \equiv \pm 127$ (mód. 243).
6, a. $x \equiv 13, 19, 45, 51$ (mód. 64). **b.** $x \equiv 41, 87, 169, 215$ (mód. 256)

Respuestas a los ejercicios del capítulo VI

1, a. 6. **b.** 18.
2, a. 3, 3, 3. **b.** 5, 5, 5. **c.** 7.
5, a. α) 0; β) 1; γ) 3. **b.** α) 0; β) 1; γ) 10.
6, a. α) $x \equiv 40; 27$ (mód. 67). β) $x \equiv 33$ (mód. 67).
γ) $x \equiv 8, 36, 28, 59, 31, 39$ (mód. 67).
b. α) $x \equiv 17$ (mód. 73). β) $x \equiv 50, 12, 35, 23, 61, 38$ (mód. 73).
γ) $x \equiv 3, 24, 46$ (mód. 73).

7, a. α) 0; β) 4. **b.** α) 0; β) 7.
8, a. α) $x \equiv 54$ (mód. 101). β) $x \equiv 53, 86, 90, 66, 8$ (mód. 101).
b. $x \equiv 59, 11, 39$ (mód. 109).
9, a. α) 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17; β) 1, 7, 8, 11, 12, 18.
b. α) 1, 6, 8, 10, 11, 14, 23, 26, 27, 29, 31, 36;
β) 1, 7, 9, 10, 12, 16, 26, 33, 34.
10, a. α) 7, 37; β) 3, 5, 12, 18, 19, 20, 26, 28, 29, 30, 33, 34.
b. α) 3, 27, 41, 52;
β) 2, 6, 7, 10, 17, 18, 26, 30, 31, 35, 43, 44, 51, 54, 55, 59

TABLAS DE INDICES

NUMERO PRIMO 3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2								

NUMERO PRIMO 5

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	3	2					

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	3						

NUMERO PRIMO 7

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	2	1	4	5	3			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	2	6	4	5				

NUMERO PRIMO 11

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	8	2	4	9	7	3	6
1	5									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6
1										

NUMERO PRIMO 13

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	4	2	9	5	11	3	8
1	10	7	6							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5
1	10	7								

NUMERO PRIMO 17

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	14	1	12	5	15	11	10	2
1	3	7	13	4	9	6	8			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14
1	8	7	4	12	2	6				

NUMERO PRIMO 19

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	13	2	16	14	6	3	8
1	17	12	15	5	7	11	4	10	9	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	13	7	14	9	18
1	17	15	11	3	6	12	5	10		

NUMERO PRIMO 23

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	2	16	4	1	18	19	6	10
1	3	9	20	14	21	17	8	7	12	15
2	5	13	11							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	2	10	4	20	8	17	16	11
1	9	22	18	21	13	19	3	15	6	7
2	12	14								

NUMERO PRIMO 29

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	5	2	22	6	12	3	10
1	23	25	7	18	13	27	4	21	11	9
2	24	17	26	20	8	16	19	15	14	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	3	6	12	24	19
1	9	18	7	14	28	27	25	21	13	26
2	23	17	5	10	20	11	22	15		

NUMERO PRIMO 31

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	24	1	18	20	25	28	12	2
1	14	23	19	11	22	21	6	7	26	4
2	8	29	17	27	13	10	5	3	16	9
3	15									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	19	26	16	17	20	29
1	25	13	8	24	10	30	28	22	4	12
2	5	15	14	11	2	6	18	23	7	21

NUMERO PRIMO 37

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	26	2	23	27	32	3	16
1	24	30	28	11	33	13	4	7	17	35
2	25	22	31	15	29	10	12	6	34	21
3	14	9	5	20	8	19	18			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	27	17	34	31
1	25	13	26	15	30	23	9	18	36	35
2	33	29	21	5	10	20	3	6	12	24
3	11	22	7	14	28	19				

NUMERO PRIMO 41

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	26	15	12	22	1	39	38	30
1	8	3	27	31	25	37	24	33	16	9
2	34	14	29	36	13	4	17	5	11	7
3	23	28	10	18	19	21	2	32	35	6
4	20									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	6	36	11	25	27	39	29	10	19
1	32	28	4	24	21	3	18	26	33	34
2	40	35	5	30	16	14	2	12	31	22
3	9	13	37	17	20	38	23	15	8	7

NUMERO PRIMO 43

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	27	1	12	25	28	35	39	2
1	10	30	13	32	20	26	24	38	29	19
2	37	36	15	16	40	8	17	3	5	41
3	11	34	9	31	23	18	14	7	4	33
4	22	6	21							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	38	28	41	37	25	32
1	10	30	4	12	36	22	23	26	35	19
2	14	42	40	34	16	5	15	2	6	18
3	11	33	13	39	31	7	21	20	17	8
4	24	29								

NUMERO PRIMO 47

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	18	20	36	1	38	32	8	40
1	19	7	10	11	4	21	26	16	12	45
2	37	6	25	5	28	2	29	14	22	35
3	39	3	44	27	34	33	30	42	17	31
4	9	15	24	13	43	41	23			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	25	31	14	23	21	11	8	40
1	12	13	18	43	27	41	17	38	2	10
2	3	15	28	46	42	22	16	33	24	26
3	36	39	7	35	34	29	4	20	6	30
4	9	45	37	44	32	19				

NUMERO PRIMO 53

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	17	2	47	18	14	3	34
1	48	6	19	24	15	12	4	10	35	37
2	49	31	7	39	20	42	25	51	16	46
3	13	33	5	23	11	9	36	30	38	41
4	50	45	32	22	8	29	40	44	21	28
5	43	27	26							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	11	22	44	35
1	17	34	15	30	7	14	28	3	6	12
2	24	48	43	33	13	26	52	51	49	45
3	37	21	42	31	9	18	36	19	38	23
4	46	39	25	50	47	41	29	5	10	20
5	40	27								

NUMERO PRIMO 59

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	50	2	6	51	18	3	42
1	7	25	52	45	19	56	4	40	43	38
2	8	10	26	15	53	12	46	34	20	28
3	57	49	5	17	41	24	44	55	39	37
4	9	14	11	33	27	48	16	23	54	36
5	13	32	47	22	35	31	21	30	29	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	5	10	20	40
1	21	42	25	50	41	23	46	33	7	14
2	28	56	53	47	35	11	22	44	29	58
3	57	55	51	43	27	54	49	39	19	38
4	17	34	9	18	36	13	26	52	45	31
5	3	6	12	24	48	37	15	30		

NUMERO PRIMO 61

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	6	2	22	7	49	3	12
1	23	15	8	40	50	28	4	47	13	26
2	24	55	16	57	9	44	41	18	51	35
3	29	59	5	21	48	11	14	39	27	46
4	25	54	56	43	17	34	58	20	10	38
5	45	53	42	33	19	37	52	32	36	31
6	30									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	3	6	12	24
1	48	35	9	18	36	11	22	44	27	54
2	47	33	5	10	20	40	19	38	15	30
3	60	59	57	53	45	29	58	55	49	37
4	13	26	52	43	25	50	39	17	34	7
5	14	28	56	51	41	21	42	23	46	31

NUMERO PRIMO 67

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	39	2	15	40	23	3	12
1	16	59	41	19	24	54	4	64	13	10
2	17	62	60	28	42	30	20	51	25	44
3	55	47	5	32	65	38	14	22	11	58
4	18	53	63	9	61	27	29	50	43	46
5	31	37	21	57	52	8	26	49	45	36
6	56	7	48	35	6	34	33			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	64	61	55	43
1	19	38	9	18	36	5	10	20	40	13
2	26	52	37	7	14	28	56	45	23	46
3	25	50	33	66	65	63	59	51	35	3
4	6	12	24	48	29	58	49	31	62	57
5	47	27	54	41	15	30	60	53	39	11
6	22	44	21	42	17	34				

NUMERO PRIMO 71

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	6	26	12	28	32	1	18	52
1	34	31	38	39	7	54	24	49	58	16
2	40	27	37	15	44	56	45	8	13	68
3	60	11	30	57	55	29	64	20	22	65
4	46	25	33	48	43	10	21	9	50	2
5	62	5	51	23	14	59	19	42	4	3
6	66	69	17	53	36	67	63	47	61	41
7	35									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	7	49	59	58	51	2	14	27	47
1	45	31	4	28	54	23	19	62	8	56
2	37	46	38	53	16	41	3	21	5	35
3	32	11	6	42	10	70	64	22	12	13
4	20	69	57	44	24	26	40	67	43	17
5	48	52	9	63	15	34	25	33	18	55
6	30	68	50	66	36	39	60	65	29	61

NUMERO PRIMO 73

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	8	6	16	1	14	33	24	12
1	9	55	22	59	41	7	32	21	20	62
2	17	39	63	46	30	2	67	18	49	35
3	15	11	40	61	29	34	28	64	70	65
4	25	4	47	51	71	13	54	31	38	66
5	10	27	3	53	26	56	57	68	43	5
6	23	58	19	45	48	60	69	50	37	52
7	42	44	36							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	25	52	41	59	3	15	2	10
1	50	31	9	45	6	30	4	20	27	62
2	18	17	12	60	8	40	54	51	36	34
3	24	47	16	7	35	29	72	68	48	21
4	32	14	70	58	71	63	23	42	64	28
5	67	43	69	53	46	11	55	56	61	13
6	65	33	19	22	37	39	49	26	57	66
7	38	44								

NUMERO PRIMO 79

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	4	1	8	62	5	53	12	2
1	66	68	9	34	57	63	16	21	6	32
2	70	54	72	26	13	46	38	3	61	11
3	67	56	20	69	25	37	10	19	36	35
4	74	75	58	49	76	64	30	59	17	28
5	50	22	42	77	7	52	65	33	15	31
6	71	45	60	55	24	18	73	48	29	27
7	41	51	14	44	23	47	40	43	39	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	2	6	18	54	4	12
1	36	29	8	24	72	58	16	48	65	37
2	32	17	51	74	64	34	23	69	49	68
3	46	59	19	57	13	39	38	35	26	78
4	76	70	52	77	73	61	25	75	67	43
5	50	71	55	7	21	63	31	14	42	47
6	62	28	5	15	45	56	10	30	12	33
7	20	60	22	66	40	41	44	53		

NUMERO PRIMO 83

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	72	2	27	73	8	3	62
1	28	24	74	77	9	17	4	56	63	47
2	29	80	25	60	75	54	78	52	10	12
3	18	38	5	14	57	35	64	20	48	67
4	30	40	81	71	26	7	61	23	76	16
5	55	46	79	59	53	51	11	37	13	34
6	19	66	39	70	6	22	15	45	58	50
7	36	33	65	69	21	44	49	32	68	43
8	31	42	41							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	64	45	7	14
1	28	56	29	58	33	66	49	15	30	60
2	37	74	65	47	11	22	44	5	10	20
3	40	80	77	71	59	35	70	57	31	62
4	41	82	81	79	75	67	51	19	38	76
5	69	55	27	54	25	50	17	34	68	53
6	23	46	9	18	36	72	61	39	78	73
7	63	43	3	6	12	24	48	13	26	52
8	21	42								

NUMERO PRIMO 89

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	16	1	32	70	17	81	48	2
1	86	84	33	23	9	71	64	6	18	35
2	14	82	12	57	49	52	39	3	25	59
3	87	31	80	85	22	63	34	11	51	24
4	30	21	10	29	28	72	73	54	65	74
5	68	7	55	78	19	66	41	36	75	43
6	15	69	47	83	8	5	13	56	38	58
7	79	62	50	20	27	53	67	77	40	42
8	46	4	37	61	26	76	45	60	44	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	81	65	17	51	64	14
1	42	37	22	66	20	60	2	6	18	54
2	73	41	34	13	39	28	84	74	44	43
3	40	31	4	12	36	19	57	82	68	26
4	78	56	79	59	88	86	80	62	8	24
5	72	38	25	75	47	52	67	23	69	29
6	87	83	71	35	16	48	55	76	50	61
7	5	15	45	46	49	58	85	77	53	70
8	32	7	21	63	11	33	10	30		

NUMERO PRIMO 97

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	34	70	68	1	8	31	6	44
1	35	86	42	25	65	71	40	89	78	81
2	69	5	24	77	76	2	59	18	3	13
3	9	46	74	60	27	32	16	91	19	95
4	7	85	39	4	58	45	15	84	14	62
5	36	63	93	10	52	87	37	55	47	67
6	43	64	80	75	12	26	94	57	61	51
7	66	11	50	28	29	72	53	21	33	30
8	41	88	23	17	73	90	38	83	92	54
9	79	56	49	20	22	82	48			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	25	28	43	21	8	40	6	30
1	53	71	64	29	48	46	36	83	27	38
2	93	77	94	82	22	13	65	34	73	74
3	79	7	35	78	2	10	50	56	86	42
4	16	80	12	60	9	45	31	58	96	92
5	72	69	54	76	89	57	91	67	44	26
6	33	68	49	51	61	14	70	59	4	20
7	3	15	75	84	32	63	24	23	18	90
8	62	19	95	87	47	41	11	55	81	17
9	85	37	88	52	66	39				

TABLA
de los números primos <4070 y sus raíces primitivas mínimas

p	*g*	*p*	*g*	*p*	*g*	*p*	*g*	*p*	*g*	*p*	*g*	*p*	*g*
2	1	179	2	419	2	661	2	947	2	1229	2	1523	2
3	2	181	2	421	2	673	5	953	3	1231	3	1531	2
5	2	191	19	431	7	677	2	967	5	1237	2	1543	5
7	3	193	5	433	5	683	5	971	6	1249	7	1549	2
11	2	197	2	439	15	691	3	977	3	1259	2	1553	3
13	2	199	3	443	2	701	2	983	5	1277	2	1559	19
17	3	211	2	449	3	709	2	991	6	1279	3	1567	3
19	2	223	3	457	13	719	11	997	7	1283	2	1571	2
23	5	227	2	461	2	727	5	1009	11	1289	6	1579	3
29	2	229	6	463	3	733	6	1013	3	1291	2	1583	5
31	3	233	3	467	2	739	3	1019	2	1297	10	1597	11
37	2	239	7	479	13	743	5	1021	10	1301	2	1601	3
41	6	241	7	487	3	751	3	1031	14	1303	6	1607	5
43	3	251	6	491	2	757	2	1033	5	1307	2	1609	7
47	5	257	3	499	7	761	6	1039	3	1319	13	1613	3
53	2	263	5	503	5	769	11	1049	3	1321	13	1619	2
59	2	269	2	509	2	773	2	1051	7	1327	3	1621	2
61	2	271	6	521	3	787	2	1061	2	1361	3	1627	3
67	2	277	5	523	2	797	2	1063	3	1367	5	1637	2
71	7	281	3	541	2	809	3	1069	6	1373	2	1657	11
73	5	283	3	547	2	811	3	1087	3	1381	2	1663	3
79	3	293	2	557	2	821	2	1091	2	1399	13	1667	2
83	2	307	5	563	2	823	3	1093	5	1409	3	1669	2
89	3	311	17	569	3	827	2	1097	3	1423	3	1693	2
97	5	313	10	571	3	829	2	1103	5	1427	2	1697	3
101	2	317	2	577	5	839	11	1109	2	1429	6	1699	3
103	5	331	3	587	2	853	2	1117	2	1433	3	1709	3
107	2	337	10	593	3	857	3	1123	2	1439	7	1721	3
109	6	347	2	599	7	859	2	1129	11	1447	3	1723	3
113	3	349	2	601	7	863	5	1151	17	1451	2	1733	2
127	3	353	3	607	3	877	2	1153	5	1453	2	1741	2
131	2	359	7	613	2	881	3	1163	5	1459	5	1747	2
137	3	367	6	617	3	883	2	1171	2	1471	6	1753	7
139	2	373	2	619	2	887	5	1181	7	1481	3	1759	6
149	2	379	2	631	3	907	2	1187	2	1483	2	1777	5
151	6	383	5	641	3	911	17	1193	3	1487	5	1783	10
157	5	389	2	643	11	919	7	1201	11	1489	14	1787	2
163	2	397	5	647	5	929	3	1213	2	1493	2	1789	6
167	5	401	3	653	2	937	5	1217	3	1499	2	1801	11
173	2	409	21	659	2	941	2	1223	5	1511	11	1811	6

Continuación

p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g
1823	5	2131	2	2437	2	2749	6	3083	2	3433	5	3733	2
1831	3	2137	10	2441	6	2753	3	3089	3	3449	3	3739	7
1847	5	2141	2	2447	5	2767	3	3109	6	3457	7	3761	3
1861	2	2143	3	2459	2	2777	3	3119	7	3461	2	3767	5
1867	2	2153	3	2467	2	2789	2	3121	7	3463	3	3769	7
1871	14	2161	23	2473	5	2791	6	3137	3	3467	2	3779	2
1873	10	2179	7	2477	2	2797	2	3163	3	3469	2	3793	5
1877	2	2203	5	2503	3	2801	3	3167	5	3491	2	3797	2
1879	6	2207	5	2521	17	2803	2	3169	7	3499	2	3803	2
1889	3	2213	2	2531	2	2819	2	3181	7	3511	7	3821	3
1901	2	2221	2	2539	2	2833	5	3187	2	3517	2	3823	3
1907	2	2237	2	2543	5	2837	2	3191	11	3527	5	3833	3
1913	3	2239	3	2549	2	2843	2	3203	2	3529	17	3847	5
1931	2	2243	2	2551	6	2851	2	3209	3	3533	2	3851	2
1933	5	2251	7	2557	2	2857	11	3217	5	3539	2	3853	2
1949	2	2267	2	2579	2	2861	2	3221	10	3541	7	3863	5
1951	3	2269	2	2591	7	2879	7	3229	6	3547	2	3877	2
1973	2	2273	3	2593	7	2887	5	3251	6	3557	2	3881	13
1979	2	2281	7	2609	3	2897	3	3253	2	3559	3	3889	11
1987	2	2287	19	2617	5	2903	5	3257	3	3571	2	3907	2
1993	5	2293	2	2621	2	2909	2	3259	3	3581	2	3911	13
1997	2	2297	5	2633	3	2917	5	3271	3	3583	3	3917	2
1999	3	2309	2	2647	3	2927	5	3299	2	3593	3	3919	3
2003	5	2311	3	2657	3	2939	2	3301	6	3607	5	3923	2
2011	3	2333	2	2659	2	2953	13	3307	2	3613	2	3929	3
2017	5	2339	2	2663	5	2957	2	3313	10	3617	3	3931	2
2027	2	2341	7	2671	7	2963	2	3319	6	3623	5	3943	3
2029	2	2347	3	2677	2	2969	3	3323	2	3631	15	3947	2
2039	7	2351	13	2683	2	2971	10	3329	3	3637	2	3967	6
2053	2	2357	2	2687	5	2999	17	3331	3	3643	2	3989	2
2063	5	2371	2	2689	19	3001	14	3343	5	3659	2	4001	3
2069	2	2377	5	2693	2	3011	2	3347	2	3671	13	4003	2
2081	3	2381	3	2699	2	3019	2	3359	11	3673	5	4007	5
2083	2	2383	5	2707	2	3023	5	3361	22	3677	2	4013	2
2087	5	2389	2	2711	7	3037	2	3371	2	3691	2	4019	2
2089	7	2393	3	2713	5	3041	3	3373	5	3697	5	4021	2
2099	2	2399	11	2719	3	3049	11	3389	3	3701	2	4027	3
2111	7	2411	6	2729	3	3061	6	3391	3	3709	2	4049	3
2113	5	2417	3	2731	3	3067	2	3407	5	3719	7	4051	6
2129	3	2423	5	2741	2	3079	6	3413	2	3727	3	4057	5

INDICE ALFABÊTICO DE MATERIAS

INDICE

CAPITULO CUARTO
CONGRUENCIAS CON UNA INCOGNITA

CAPITULO QUINTO
CONGRUENCIAS DE SEGUNDO GRADO

CAPITULO SEXTO
RAICES PRIMITIVAS E INDICES

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS NUMERICOS